

**Kummertheorie und der Fermat'sche Satz**  
(SoSe 2021)

Übungsblatt 6

**Aufgabe 1.** Sei  $p$  eine ungerade Primzahl. Beweisen Sie, dass es genau  $\frac{p-1}{2}$  quadratische Reste in  $\mathbb{Z}_p$  gibt. **5P**

**Aufgabe 2.** Sei  $K$  ein kommutativer Ring mit 1 und sei  $K$  nullteilerfrei (d.h. aus  $ab = 0$  folgt  $a = 0$  oder  $b = 0$ .) Beweisen Sie, dass alle Primelemente in  $K$  irreduzibel sind. **4P**

**Aufgabe 3.** Sei  $K$  ein Körper und  $R := K \times K$  ein Ring mit der üblichen Addition und Multiplikation. Beschreiben Sie **4+4+4P**

- 1) alle Einheitselemente in  $R$ ;
- 2) alle Primelemente in  $R$ ;
- 3) alle irreduziblen Elemente in  $R$ .

**Aufgabe 4.** Sei  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ . **6+3P**

- a) Welche der Zahlen  $2$ ,  $2 + 2\sqrt{-5}$ ,  $3 + 2\sqrt{-5}$  sind irreduzibel in  $\mathcal{O}_K$  und welche nicht?
- b) Welche dieser Zahlen sind prim in  $\mathcal{O}_K$  und welche nicht?

*Hinweis.* Benutzen Sie das Skript und folgende Fakten:

- Für jede ganze algebraische Zahl  $\alpha$  gilt  $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$ .
- $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ .