

Lineare Algebra I
Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Benutzen Sie die Cramersche Regel, um die Lösung des folgenden reellen Gleichungssystems zu finden: [7P.]

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 & = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = -2 \\ x_2 + 5x_3 & = -4. \end{cases}$$

Aufgabe 2

Finden Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für das folgende homogene Gleichungssystem: [7P.]

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3

In \mathbb{R}^4 betrachten wir $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. [8P.]

Sei $U_1 = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ die lineare Hülle von v_1, v_2, v_3 und sei $U_2 = \mathcal{L}(v_4, v_5)$.

Geben Sie eine Basis für $U_1 \cap U_2$ und eine Basis für $U_1 + U_2$ an.

Aufgabe 4

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 20 & -3 \end{pmatrix} \in M(3, 3, \mathbb{R})$. [3+3+4P.]

- Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A .
- Berechnen Sie die Eigenwerte von A .
- Für jeden Eigenwert λ berechnen Sie eine Basis des zugehörigen Eigenraums

$$\text{Eig}(A, \lambda) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = \lambda x\}.$$

Fortsetzung Seite 2.

Definition. Die Fibonacci-Folge u_1, u_2, u_3, \dots ist definiert durch

$$u_1 = 1, u_2 = 1 \text{ und } u_{k+1} = u_k + u_{k-1} \text{ f\u00fcr } k \geq 2.$$

Also ist $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, \dots$

Aufgabe 5

Sei $A_n \in M(n, n, \mathbb{R})$ die Matrix, deren Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte [3+4+1P.]
gegeben ist durch:

$$[A_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ oder } j = i + 1, \\ -1 & \text{falls } j = i - 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie $\det A_4$ mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes.
- (b) Zeigen Sie, dass $\det A_{n+1} = \det A_n + \det A_{n-1}$ f\u00fcr $n \geq 2$ gilt.
- (c) Mit der oben definierten Fibonacci-Folge u_1, u_2, \dots beweisen Sie, dass

$$\det A_n = u_{n+1}$$

f\u00fcr $n \geq 1$ gilt.

Hinweis: F\u00fcr Aufgabenteil (b) kann man zweimal den Entwicklungssatz von Laplace anwenden.