Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matthias Köhne

Abgabe Di, 2.02, 14:00 Uhr

Besonders wichtig sind die Aufgaben 4 und 5. Sie können in der Klausur auftreten.

Lineare Algebra I
Übungsblatt 13

Aufgabe 1 [4+5P.]

(a) Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \text{ und } f\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}?$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\ker(g) = \mathrm{Im}(f) \text{ und } \mathrm{Im}(g) = \ker(f).$$

Tipp: Benutzen Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Abbildungen.

Aufgabe 2

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,2,\mathbb{R})$ berechnen Sie $\chi_A(\lambda)$. Prüfen Sie hiermit direkt, dass $\chi_A(A) = \mathbb{O}_2$ gilt. [5P.]

Aufgabe 3 [2+4P.]

Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, \ldots, U_k$ seien K-Untervektorräume von V. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind (Beweis oder Gegenbeispiel):

(a) Falls die Summe $U_1 + \ldots + U_k$ direkt ist, so gilt $U_i \cap U_j = \{0_V\}$ für alle $1 \leqslant i, j \leqslant k$ mit $i \neq j$.

(b) Falls $U_i \cap U_j = \{0_V\}$ für alle $1 \leqslant i, j \leqslant k$ mit $i \neq j$, so ist die Summe $U_1 + \ldots + U_k$ direkt.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4 (Diagonalisierbarkeit) [3+5P.]

Entscheiden Sie mit dem Kriterium (c) aus Satz 24.1.8 des Kurzskriptes jeweils, ob die Matrix A diagonalisierbar ist. Falls ja, finden Sie mit der nach diesem Satz angegebenen Bemerkung eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass folgendes gilt:

$$T^{-1}AT = D.$$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2, 2, \mathbb{R})$.

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M(3, 3, \mathbb{R})$.

Die Definitionen und Sätze, die für die Aufgabe 5 wichtig sind, finden Sie im Kurzskript (Vorlesung 25). Die Beweise hierzu werden in den Vorlesungen am Montag und Mittwoch behandelt.

Aufgabe 5 (Übergangsmatrizen und Darstellungsmatrizen) [2+2+2+3+3P.]

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Seien weiter die folgenden Basen gewählt: $e = \{e_1, e_2\}$ mit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $e' = \{e'_1, e'_2\}$ mit $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Übergangsmatrix T von e zu e'.

(b) Berechnen Sie die Übergangsmatrix T' von e' zu e.

(c) Berechnen Sie $T \cdot T'$ und $T' \cdot T$.

(d) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $[\varphi]^e_e$ und $[\varphi]^{e'}_{e'}$.

(e) Überprüfen Sie durch Nachrechnen, dass die Gleichung $[\varphi]^{e'}_{e'} = T^{-1}[\varphi]^e_e T$ für die in (a)-(d) berechneten Matrizen erfüllt ist.