Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matthias Köhne

Abgabe Di., 10.11, 14:00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. [4+4 P.]

In der vierten Vorlesung wurde die Gruppe $G = (\{r_0, r_{120}, r_{240}, l_A, l_B, l_C\}, \circ)$ der Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks ABC definiert.

(a) Füllen Sie die folgende Tabelle aus:

$\circ$	r_0	r_{120}	r_{240}	l_A	l_B	l_C
r_0						
r_{120}						
r_{240}						
l_A						
l_B				r_{240}		
l_C						

(b) Erklären Sie, warum $l_B \circ l_A = r_{240}$ ist.

Aufgabe 2. [4+4 P.]

Entscheiden Sie jeweils, welche der Axiome (1), (2), (3) aus der Definition einer Gruppe erfüllt sind und welche nicht:

(a) Die Menge $\mathbb{Z}$ zusammen mit der Verknüpfung
$$x * y = x + 2y.$$

(b) Die Menge $\mathbb{Z}$ zusammen mit der Verknüpfung
$$x * y = x + y + 1.$$

Aufgabe 3. [3+3+2 P.]

(a) Geben Sie ein Beispiel einer endlichen Gruppe $(G, *)$ und zweier Elemente $x, y \in G$, so dass $\mathrm{Ord}(x * y) \neq \mathrm{Ord}(x) \cdot \mathrm{Ord}(y)$ ist.

(b) Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ord}(x * y) = \mathrm{Ord}(y * x)$ für alle $x, y \in G$ gilt.
Bemerkung: Im Allgemeinen gilt $x * y \neq y * x$.

(c) Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Ord}(x^{-1})$ für alle $x \in G$ gilt.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass $S_3 = \langle \alpha, \gamma_1 \rangle$ ist. [8 P.]

Hinweis: In der Vorlesung 4 haben wir α, γ_1 und S_3 definiert. Die Bezeichnung $G = \langle M \rangle$ wurde in der Definition 5.1.6 eingeführt.

Aufgabe 5. [8 P.]

Geben Sie die Liste aller Untergruppen der Permutationsgruppe S_3 an. Beweisen Sie, das Ihre Liste alle Untergruppen von S_3 enthält.