Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matthias Köhne

Abgabe Di., 17.11, 14:00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 4

`Definition.` Sei M eine nicht-leere Teilmenge einer Gruppe $(G, *)$. Wir betrachten die Teilmenge H von G, die aus Elmenten

$$m_1 * m_2 * \cdots * m_k$$

besteht, wobei $m_i \in M$ oder $m_i^{-1} \in M$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ und $k \in \mathbb{N}$ ist. Man schreibt $H = \langle M \rangle$.

Aufgabe 1. [4+4 P.]

(a) Sei M eine nicht-leere Teilmenge einer Gruppe $(G, *)$. Beweisen Sie, dass $\langle M \rangle$ eine Untergruppe von G ist.

`Definition.` $\langle M \rangle$ heißt die *von M erzeugte Untergruppe* von G.

(b) Wir betrachten die Untergruppe $\langle 4, 14 \rangle$ von $\mathbb{Z}_{20}$. Wie viele Elemente hat diese Untergruppe?

Aufgabe 2. [8 P.]

Wir betrachten die Untergruppe $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ der Gruppe $(S_4, \circ)$. Schreiben Sie alle Elemente von U auf.

Aufgabe 3. [4+4 P.]

(a) Sei $\varphi : (\mathbb{Z}_8, +_8) \to (\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ ein Homomorphismus mit $\varphi(1) = 3$.
Berechnen Sie $\varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}_8$.

(b) Geben Sie alle Homomorphismen $\varphi : (\mathbb{Z}_6, +_6) \to (\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$ an. Begründen Sie, dass Ihre Liste vollstandig ist.

Aufgabe 4. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n\mathbb{Z}$ als die Menge aller ganzen Zahlen, die durch n teilbar sind. Beweisen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die Gruppen $(n\mathbb{Z}, +)$ und $(m\mathbb{Z}, +)$ isomorph sind. [8 P.]

Hinweis. Siehe die Definition 6.1.7 des Kurzskripts im Netz.

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass die Gruppen $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ nicht isomorph sind. [8 P.]