Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matthias Köhne

Abgabe Di., 24.11, 14:00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. [4+4 P.]

Seien $(G, *)$ und $(H, \diamond)$ Gruppen. Wir definieren auf der Menge $G \times H$ eine Verknüpfung $\cdot$ durch

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \diamond h_2).$$

Im Tutorium haben wir gezeigt, dass $(G \times H, \cdot)$ eine Gruppe ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ zyklisch ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ nicht zyklisch ist.

Aufgabe 2. [6 P.]

Es gibt genau einen Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{20}$ mit $\varphi(1) = 15$. Bestimmen Sie für diesen Homomorphismus $\ker(\varphi)$ und $\mathrm{im}(\varphi)$.

Aufgabe 3. [9 P.]

Geben Sie für jede Untergruppe U von $G = (\mathbb{Z}_6, +_6)$ alle linken Nebenklassen von U in G an.

Aufgabe 4. [3+2+3 P.]

(a) Schreiben Sie die Permutation $\tau = (12754) \circ (1874) \circ (17) \circ (185)$ als Produkt von paarweise unabhängigen Zyklen.

(b) Wir betrachten in S_9 die Permutation σ:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma(i)$	5	7	2	9	1	3	6	8	4

Schreiben Sie σ als Produkt von paarweise unabhängigen Zyklen.

(c) Berechnen Sie die Permuatation σ^{103}.

Fur die nächste Aufgabe siehe die Definition 8.1.1 eines k-Zyklus in dem Kurzskript.

Aufgabe 5. [4+5 P.]

(a) Schreiben Sie die Permutation $(1\ 2)(3\ 4)$ aus S_4 als Produkt von zwei 3-Zyklen auf.

(b) Schreiben Sie die Permutation $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ aus S_5 als Produkt von 3-Zyklen auf.