Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matthias Köhne

Abgabe Di., 8.12, 14:00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 7

Aufgabe 1. [2+2+4 P.]

(a) Berechnen Sie $\mathrm{Ord}((1\ 2\ 3) \circ (5\ 6))$ in S_6.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Ord}((1\ 2\ 3\ 4) \circ (5\ 6))$ in S_6.

(c) Finden Sie in S_{11} ein Element der Ordnung 30 und geben Sie das Signum dieses Elementes an.

Aufgabe 2 [2+3+3 P.]

Wir betrachten die Menge

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2, \mathbb{R}).$$

(a) Beweisen Sie: Aus $X, Y \in M$ folgt $X + Y \in M$ und $X \cdot Y \in M$.

(b) Beweisen Sie, dass M mit den auf $M(2, \mathbb{R})$ definierten Verknüpfungen ein Körper ist.

(c) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : M \to \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + ib$$

ein Isomorphismus ist
(d.h. φ ist bijektiv und es gilt $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$ und $\varphi(X \cdot Y) = \varphi(X) \cdot \varphi(Y)$ für alle $X, Y \in M$).

Aufgabe 3 [4+4 P.]

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ähnlich zu den Verknüpfungen der komplexen Zahlen definieren wir auf der Menge

$$C_n := \mathbb{Z}_n + i\mathbb{Z}_n = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}_n\}$$

die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch

$$\begin{aligned} (a + ib) + (c + id) &= \mathrm{Rest}_n(a + c) + i\mathrm{Rest}_n(b + d) \\ (a + ib) \cdot (c + id) &= \mathrm{Rest}_n(ac - bd) + i\mathrm{Rest}_n(ad + bc) \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes von 0 verschiedenen Element von C_3 ein multiplikatives Inverses besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass C_2 mit diesen Verknüpfungen kein Körper ist.

Bemerkung: C_3 ist mit diesen Verknüpfungen ein Körper.

Aufgabe 4. [8 P.]

Zeigen Sie, dass es in einem Körper keine Ideale außer $\{0\}$ und K gibt.

Die Fortsetzung ist auf der Seite 2.

Aufgabe 5. [2+3+3 P.]

(a) Gegeben seien die komplexen 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & 3-i \\ 5 & 2+i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2+i & 4+2i \\ -1 & -7-3i \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}).$$

Berechnen Sie $A \cdot B, B \cdot A$ und $A + B$.

(b) Finden sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = -24 - 70i$.

(c) Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen

$$z_0 = 1, \quad z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllen.