Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp
Christoph Bärligea

Keine Abgabe. Besprechung: 19.04 und 20.04

Lineare Algebra II

Dieses Blatt ist für die Lösung von Übungsblatt 2 wichtig

Übungsblatt 0

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(a) Überprüfen Sie, dass A eine Orthogonalmatrix ist.

(b) Finden Sie die Standardform B der Matrix A und eine Orthogonalmatrix C, so dass gilt

$$B = C^t AC.$$

Hier ist C^t die transponierte Matrix zu C.

Aufgabe 2. Sei

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8+i & 2-2i & 2+2i \\ 2-2i & 5+4i & -4-4i \\ -2-2i & 4+4i & 5+4i \end{pmatrix}$$

(a) Überprüfen Sie, dass A eine unitäre Matrix ist.

(b) Finden Sie die Standardform B der Matrix A und eine unitäre Matrix C, so dass gilt

$$B = \overline{C^t} AC.$$

Hier ist $\overline{C^t}$ die komplex-konjugierte Matrix zu C^t.

Hinweis. Sie dürfen benutzen, dass $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - i)$ ist.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass eine Orthogonalbasis $w_1, \ldots, w_n$ von $\mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen a_{ij}, $1 \leqslant j < i \leqslant n$ existieren, so dass gilt:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1, \\ w_2 &= v_2 - \alpha_{21} v_1, \\ w_3 &= v_3 - \alpha_{31} v_1 - \alpha_{32} v_2, \\ \cdots & \\ w_n &= v_n - \alpha_{n1} v_1 - \alpha_{n2} v_2 - \cdots - \alpha_{n,n-1} v_{n-1}. \end{aligned}$$

(b) Wir definieren drei Teilmengen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

O_n ist die Menge von orthogonalen Matrizen,

D_n^+ ist die Menge von Diagonalmatrizen mit strikt positiven Diagonalelementen,

N_n ist die Menge von oberen Dreiecksmatrizen mit $1, \ldots, 1$ auf der Diagonale.

Beweisen Sie, dass diese Teilmengen Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sind.

(c) Leiten Sie aus (a) ab, dass jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ in der Form

$$A = XYZ$$

aufgeschrieben werden kann, wobei $X \in \mathrm{O}_n$, $Y \in \mathrm{D}_n^+$, $Z \in \mathrm{N}_n$ gilt. Das wird uns die **Iwasawa-Zerlegung** geben:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n \cdot \mathrm{D}_n^+ \cdot \mathrm{N}_n.$$

(d) Beweisen Sie, dass die Zerlegung jeder Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ wie in (c) eindeutig ist.

(e) Zerlegen Sie die folgende Matrix in drei Matrizen wie in (c):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$