Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 6.07. Besprechung: 12.07 und 13.07

Lineare Algebra II
Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Seien [8 P.]

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - \lambda x + 2, \\ g(x) &= x^2 + \lambda x + 2 \end{aligned}$$

zwei Polynome aus $\mathbb{C}[x]$. Finden Sie alle $\lambda \in \mathbb{C}$, für die diese Polynome eine gemeinsame Nullstelle haben.

Aufgabe 2. Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ hat das Polynom $f(x) = x^4 - 4x + \lambda$ eine mehrfache Nullstelle? [8 P.]

Aufgabe 3. Sei [5+5 P.]

$$f(x) = x^3 + px + q$$

ein Polynom aus $\mathbb{R}[x]$. In Blatt 11 haben wir berechnet, dass

$$\mathbf{Dis}(f(x)) = -4p^3 - 27q^2$$

ist. Aus der Definition folgt, dass $\mathbf{Dis}(f(x)) = 0$ genau dann ist, wenn $f(x)$ eine mehrfache Nullstelle hat.

Mit Hilfe des Sturmschen Satzes beweisen Sie:

(1) Ist $\mathbf{Dis}(f(x)) > 0$, dann hat $f(x)$ drei verschiedene reelle Nullstellen.

(2) Ist $\mathbf{Dis}(f(x)) < 0$, dann hat $f(x)$ nur eine eine reelle Nullstelle.
(Die anderen zwei Nullstellen sind dann komplex konjugiert.)

Aufgabe 4. Wir betrachten die reelle Matrix [5+5 P.]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Finden Sie eine Zerlegung $A = B + C$ mit $B, C \in \mathbf{Mat}(2, 2, \mathbb{R})$, die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) B ist diagonalisierbar,

(b) C ist nilpotent,

(d) $BC = CB$.

(2) Beweisen Sie, dass diese Zerlegung für die gegebene A eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 5. Sei L ein Körper. Konstruieren Sie einen Körper K, der L enthält und strikt größer ist als L. [8 P.]