Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 15.07.
Die Lösungswege werden ins Netz gestellt

Lineare Algebra II

Übungsblatt 14

Beachten Sie, dass die Abgabe dieses Blattes bis 15.07. (Fr), 12:00 Uhr erfolgen muss.

Aufgabe 1. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, versehen mit einer symmetrischen Bilinearform $\Phi : V \times V \to K$. Die Teilmenge [5+6 P.]

$$V_0 := \{x \in V \mid \Phi(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in V\}$$

heißt *Radikal* der Bilinearform (Bezeichnung: $\mathbf{Rad}(\Phi)$). Man sagt, dass Φ *nichtentartet* ist, wenn $\mathbf{Rad}(\Phi) = \{0\}$ ist. Es ist leicht zu sehen, dass V_0 ein Untervektorraum von V ist. Beweisen Sie:

(a) Die Formel
$$\Psi(x + V_0, y + V_0) := \Phi(x, y)$$
gibt eine wohldefinierte Bilinearform auf dem Faktorraum V/V_0.

(b) Ψ ist nichtentartet.

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Beweisen Sie, dass die kanonische lineare Abbildung [11 P.]

$$V^* \otimes V \to \mathbf{End}(V), \quad f \otimes v \mapsto (x \mapsto f(x)v)$$

bijektiv ist.

Aufgabe 3. Wie lautet die Jordanform für das Kroneker-Produkt [11 P.]

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

aufgefasst als Endomorphismus von $\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}^4$?

Hinweis. Die Definition des Kroneker-Produkts wird erst am Montag gegeben.

Fortsetzung Seite 2

Seien V und W zwei K-Vektorräume und seien V^* und W^* ihre Dualräume. Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für jedes Funktional $f \in W^*$ definieren wir ein Funktional $\widetilde{f} \in V^*$ wie folgt:

$$\widetilde{f}(v) := f(\varphi(v)), \;\; v \in V.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^* : \;\; & W^* \to V^* \\ & f \mapsto \widetilde{f} \end{aligned}$$

heißt *duale Abbildung* zu φ.

Aufgabe 4. [11 P.]

Seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ entsprechend. Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\varphi^* : W^* \to V^*$ die duale Abbildung zu φ. Beweisen Sie, dass die Darstellungsmatrizen $[\varphi]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ und $[\varphi^*]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ zueinander transponiert sind.

Hinweis. Hier sind $\mathcal{A}^*$ und $\mathcal{B}^*$ die Dualbasen zu $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, s. Satz 12.2.2. des Kurzskripts.