Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 11.05. Besprechung: 17.05 und 18.05

Lineare Algebra II
Übungsblatt 4

- Lesen Sie Abschnitt 3.7 des Kurzskripts

Aufgabe 1. [5+5P.]

(a) Überprüfen Sie, ob die Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,

$$f(X,Y) := 3X_1\overline{Y_1} + 4X_2\overline{Y_2} + 5X_3\overline{Y_3} - 6X_1\overline{Y_2} - 7X_1\overline{Y_3} + 8X_2\overline{Y_3}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^3$ definiert.

(b) Überprüfen Sie, ob die Abbildung $g : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} g(X,Y) := 3X_1\overline{Y_1} + 4X_2\overline{Y_2} + 5X_3\overline{Y_3} \quad & -3X_1\overline{Y_2} - \tfrac{7}{2}X_1\overline{Y_3} + 4X_2\overline{Y_3} \\ & -3X_2\overline{Y_1} - \tfrac{7}{2}X_3\overline{Y_1} + 4X_3\overline{Y_2} \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^3$ definiert.

Hinweis. Axiom (1) soll kurz (d.h. ohne lange Berechnungen) erklärt werden. Um das Axiom (3) des Skalarprodukts für h zu überprüfen, schreiben Sie $h(X,Y)$ in der Form $\langle AX, Y\rangle$ für eine hermitesche Matrix A. Hier ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

Aufgabe 2. [3+3+4P.]

(a) Überprüfen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist. Finden Sie eine obere Dreiecksmatrix

$$G = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

so dass $A = G^tG$ gilt.

(b) Sei A eine positiv definite symmetrische 2×2-Matrix über $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass eine obere Dreiecksmatrix G mit der Eigenschaft $A = G^tG$ existiert.

(c) Sei $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Beweisen Sie, dass die Matrix $\overline{G^t}G$ positiv definit ist.

Hinweis. Sie dürfen alle Behauptungen des Abschnitts 3.7 außer Satz 3.7.7 benutzen.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. [5+5P.]

(a) Finden Sie eine hermitesche positiv definite Matrix H, so dass folgendes gilt:

$$H^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei A eine hermitesche positiv definite Matrix. Beweisen Sie, dass eine hermitesche positiv definite Matrix H mit der Eigenschaft $H^2 = A$ existiert.

Hinweis zu (b). Benutzen Sie Satz 3.5.5 des Kurzskripts.

Aufgabe 4. Wir definieren eine Abbildung [2+3+2+3P.]

$$\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}(2n, 2n, \mathbb{R})$$

durch

$$A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

wobei A, B reelle Matrizen sind.
Zum Beispiel für $n = 2$ gilt

$$\begin{pmatrix} 2+i & 3-i \\ 5i & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Überprüfen Sie, dass $\varphi(X \cdot Y) = \varphi(X) \cdot \varphi(Y)$ für alle $X, Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gilt.

(b) Leiten Sie daraus ab, dass das Bild von φ in $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ liegt.
(Somit wird $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ ein Homomorphismus.)

(c) Überprüfen Sie, dass der Kern von φ nur die Einheitsmatrix E von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ enthält.
(Somit wird φ ein injektiver Homomorphismus, also eine Einbettung.)

(d) Sei

$$J := \varphi(O + iE) = \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie, dass das Bild von φ gleich der folgenden Menge ist:

$$\{X \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid XJ = JX\}.$$