Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 8.06. Besprechung: 14.06 und 15.06

Lineare Algebra II
Übungsblatt 8

Das Kurzskript wird am 2.06 mit einem Beispiel erweitert.

Definition. Zwei Matrizen $A, B \in \mathbf{Mat}(n, n, K)$ heißen *ähnlich*, wenn eine Matrix $T \in \mathbf{GL}_n(K)$ existiert, so dass $B = T^{-1}AT$ gilt.

Aufgabe 1. Für die reelle Matrix [8 P.]

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

finden Sie die Jordanmatrix J und eine Matrix $T \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{R})$, so dass gilt:

$$J = T^{-1}AT.$$

Aufgabe 2. [3 × 4 P.]

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und seien

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix $T \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$, für die $B = T^{-1}AT$ gilt.

(b) Beweisen Sie:
Zwei Matrizen $A, B \in \mathbf{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ sind ähnlich genau dann, wenn sie gleiche Jordanformen haben (bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke).

(c) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathbf{Mat}(n, n, \mathbb{C})$, die die gleichen Minimalpolynome haben, aber nicht ähnlich sind.

Aufgabe 3. [5+5 P.]

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Für die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

finden Sie die Jordanform J und eine Matrix $T \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$, so dass gilt:

$$J = T^{-1}AT.$$

(b) Sei $B \in \mathbf{Mat}(n, n, \mathbb{C})$. Beweisen Sie, dass B und die transponierte Matrix B^t ähnlich sind.

Aufgabe 4. Sei A eine quadratische komplexe Matrix mit der Eigenschaft $A^k = E$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass A diagonalisierbar ist. [10 P.]