Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe 15.06. Besprechung: 21.06 und 22.06

Lineare Algebra II

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei [5+8P.]

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $f(A)$, wobei $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, ist.

(b) Finden Sie alle $X \in \mathbf{Mat}(2, 2, \mathbb{R})$, für die $X^2 = A$ gilt.

Hinweis zu (b). Finden Sie alle Y mit $Y^2 = J$, wobei J die Jordanform von A ist.
Dafür benutzen Sie die Folgerung dieser Gleichung $YJ = JY$.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbf{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ eine Matrix und sei $\chi_A(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \dots (x - \lambda_s)^{k_s}$ das charakteristische Polynom von A. Sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine Funktion, wobei I eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ ist. Beweisen Sie: [4+5 P.]

(a) Wenn $f(A)$ existiert, dann gilt $\det(f(A)) = (f(\lambda_1))^{k_1} \dots (f(\lambda_s))^{k_s}$.

(b) $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Spur}(A))$.

Aufgabe 3. Sei [8 P.]

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\ln(A)$.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathbf{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ eine Matrix. Sei I eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ und seien $f : I \to \mathbb{C}$ und $g : I \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, für die $f(A)$ und $g(A)$ definiert sind. [3+7 P.]
Für die Funktionen $(f + g) : I \to \mathbb{C}$ und $(f \cdot g) : I \to \mathbb{C}$ beweisen Sie:

(a) Die Matrix $(f + g)(A)$ ist definiert und es gilt

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A).$$

(b) Die Matrix $(f \cdot g)(A)$ ist definiert und es gilt

$$(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A).$$

Hinweis. Beweisen Sie die Aussage (b) für $A = J(\alpha, 3)$, dann erhalten Sie 2 Punkte. Beweisen Sie die Aussage (b) für $A = J(\alpha, n)$, dann erhalten Sie 5 Punkte. Beweisen Sie die Aussage (b) für beliebege A, dann erhalten Sie 7 Punkte.