

## Lineare Algebra I Übungsblatt 0

**Aufgabe 1.** Seien  $A, B$  und  $C$  Mengen. Beweisen Sie, wie im Satz 1.1.1 der Vorlesung (also kein graphischer Beweis), dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie, dass für die Mengen  $A, B$  und  $C$  stets die Gleichung

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

erfüllt ist.

**Hinweis:** Zum Beweis können die Sätze 1.1.2 und 1.1.1 aus der Vorlesung verwendet werden.

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie per Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie per Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$  die Ungleichung

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

erfüllt ist.

**Aufgabe 5.** Sei  $M$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen. Weiter sei  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  mit  $k \leq n$ . Beweisen Sie:

$$|\mathcal{P}_k(M)| = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$