Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe Mi, 4.07, 10:15 Uhr

Lineare Algebra I

Übungsblatt 12

Aufgaben 2 und 3 werden nach der Vorlesung am Montag klar.

Aufgabe 1. Benutzen Sie die Cramersche Regel, um die Lösung des folgenden reellen Gleichungssystems zu finden: [7P.]

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Finden Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für das folgende homogene Gleichungssystem: [7P.]

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3. In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$. [5+3P.]

Sei $U_1 = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ die lineare Hülle von v_1, v_2, v_3 und sei $U_2 = \mathcal{L}(v_4, v_5)$.

Geben Sie eine Basis für $U_1 \cap U_2$ und eine Basis für $U_1 + U_2$ an.

Aufgabe 4. [4P+6P.]

(a) Beweisen Sie, dass der Rang der folgenden Matrix S gleich 0 oder 2 ist:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in M(3, 3, \mathbb{R}).$$

(b) Sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in M(n, n, K)$ heißt *schiefsymmetrisch*, falls $A = -A^t$ gilt, wobei A^t die transponierte zu A Matrix ist. Beweisen Sie, dass der Rang jeder schiefsymmetrischen Matrix A eine gerade Zahl ist.

Fortsetzung Seite 2.

Definition. Die Fibonacci-Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ist definiert durch

$$u_1 = 1, u_2 = 1 \text{ und } u_{k+1} = u_k + u_{k-1} \text{ für } k \geqslant 2.$$

Also ist $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, \ldots$.

Aufgabe 5. Sei $A_n \in M(n, n, \mathbb{R})$ die Matrix, deren Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte gegeben ist durch: [3+4+1P.]

$$[A_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ oder } j = i + 1, \\ -1 & \text{falls } j = i - 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\det A_4$ mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes.

(b) Zeigen Sie, dass $\det A_{n+1} = \det A_n + \det A_{n-1}$ für $n \geqslant 2$ gilt.

(c) Mit der oben definierten Fibonacci-Folge $u_1, u_2, \ldots$ beweisen Sie, dass

$$\det A_n = u_{n+1}$$

für $n \geqslant 1$ gilt.

Hinweis: Für Aufgabenteil (b) kann man zweimal den Entwicklungssatz von Laplace anwenden.