Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe Di., 25.04, 10:15 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. [8 P.]

Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie per Induktion nach m:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

Hinweis. Im Beweis benutzen Sie Formel (5) aus dem Satz 2.2.2.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass die folgenden Formeln gelten: [4+4 P.]

(a) $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$,

(b) $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass die folgende Abbildung bijektiv ist: [8 P.]

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} n \mapsto 2n+1, & \text{falls } n \geqslant 0 \text{ ist,} \\ n \mapsto -2n, & \text{falls } n < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Aufgabe 4. [2+6 P.]

(a) Ist die Abbildung

$$\begin{aligned} g:\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ (p, q) &\mapsto \tfrac{p}{q} \end{aligned}$$

injektiv? Ist sie surjektiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Beweisen Sie, dass die folgende Abbildung bijektiv ist:

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (n, m) &\mapsto 2^{n-1}(2m-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. [2x4 P.]

Seien X, Y und Z Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Entscheiden Sie (Beweis oder Gegenbeispiel), welche der folgenden Aussagen richtig sind:

(a) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.

(b) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist f surjektiv.

(c) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist g injektiv.

(d) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.