Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe Mi., 23.05, 10:15 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. [8 P.]

Sei X eine Menge. Wir definieren auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ die *symmetrische Differenz* Δ durch

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ für alle } A, B \subseteq X.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$ mit Δ als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

Bemerkung: Mit der Verknüpfung Δ als Addition und $\cap$ als Multiplikation bildet $\mathcal{P}(X)$ sogar einen kommutativen Ring.

Aufgabe 2. [6+2 P.]

(a) Sei K ein Ring. Beweisen Sie, dass die Menge der 2×2 Matrizen mit Elementen aus K (bezeichnet als $M(2, K)$) zusammen mit der in Vorlesung 9 definierten Addition und Multiplikation ebenfalls ein Ring ist.

(b) Sei $K \neq \{0\}$. Finden Sie zwei Matrizen $A, B \in M(2, K)$, bei denen kein Eintrag gleich 0 ist, mit

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. [4+4 P.]

Sei K ein kommutativer Ring und seien I, J Ideale in K. Zeigen Sie, dass

$$I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\} \text{ und } I \cap J$$

ebenfalls Ideale in K sind.

Aufgabe 4. [4+4 P.]

(a) Finden Sie $\mathrm{ggT}(162, 126)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

(b) Finden Sie ganze Zahlen x, y, so dass die folgende Gleichung gilt:

$$x \cdot 162 + y \cdot 126 = \mathrm{ggT}(162, 126).$$

Aufgabe 5. [3+5 P.]

(a) Existiert ein Inverses zu 45 bezüglich $\bullet_{60}$ in dem Ring $(\mathbb{Z}_{60}, +_{60}, \bullet_{60})$?

(b) Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus finden Sie das Inverse zu 17 bezüglich $\bullet_{60}$ in dem Ring $(\mathbb{Z}_{60}, +_{60}, \bullet_{60})$.