Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe Mi., 6.06, 10:15 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 8

Bei allen Aufgaben ist eine Begründung notwendig.

Aufgabe 1.

[2+3+3+3P.]

(a) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ in dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig?

(b) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ in dem Vektorraum $(\mathbb{Z}_7)^2$ linear unabhängig?

(c) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ in dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

(d) Finden Sie einen endlichen Körper K, so dass die Vektoren $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ in dem Vektorraum K^3 linear abhängig sind.

Aufgabe 2.

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$. Seien $v_1 = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix}1-i\\1+i\end{pmatrix}$. [4P.]
Beweisen Sie, dass v_1, v_2 in V linear abhängig sind.

Definition. Seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V. Wir definieren ihre Summe durch

$$U_1 + U_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in U_1,\ v_2 \in U_2\}.$$

Man kann beweisen, dass $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$ Untervektorräume von V sind.

Aufgabe 3.

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V. [4+4+4P.]

(a) Entscheiden Sie (Beweis oder Gegenbeispiel), ob die Gleichung $(U_1 + U_2) \cap U_3 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$ stets erfüllt ist.

(b) Entscheiden Sie (Beweis oder Gegenbeispiel), ob die Gleichung $(U_1 \cap U_2) + U_3 = (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3)$ stets erfüllt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_1 \supseteq U_2$ gilt.

Hinweis: Für (a) und (b) kann man sich zunächst Beispiele in $\mathbb{R}^2$ überlegen.

Aufgabe 4.

Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. [7+6P.]

Sei $U_1 = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ die lineare Hülle von v_1, v_2 und sei $U_2 = \mathcal{L}(v_3, v_4)$. Geben Sie eine Basis für $U_1 \cap U_2$ und eine Basis für $U_1 + U_2$ an.