Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Carsten Feldkamp

Abgabe Mi, 13.06, 10:15 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 9

Alle Antworten müssen begründet werden.

Aufgabe 1

Finden Sie eine Teilmenge von [8P.]

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}\right\},$$

die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Basis $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ und die linear unabhängige Menge $\{v_1, v_2\}$ von $\mathbb{R}^3$, wobei [8P.]

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Nach dem Austauschsatz existieren Indizes $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, so dass $B \setminus \{u_i, u_j\} \cup \{v_1, v_2\}$ ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Finden Sie solche Indizes.

Hinweis: Siehe den Beweis des Austauschsatzes.

Aufgabe 3

Sei p eine Primzahl. Wie viele Untervektorräume besitzt $\mathbb{Z}_p^2$ als Vektorraum über $\mathbb{Z}_p$? [8P.]

Aufgabe 4

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die folgende Summe in $\mathbb{R}^3$ direkt: [8P.]

$$\mathcal{L}\Big(\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\}\Big) + \mathcal{L}\Big(\{\begin{pmatrix}17\\10\\20+\alpha\end{pmatrix}\}\Big).$$

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 5

[2+3+3P.]

(a) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Ordnung der Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Multiplikation.

(c) Beweisen Sie, dass es unendlich viel Matrizen $X \in M(2, \mathbb{Z})$ mit $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gibt.