Ein Fünf-Farben-Satz

Philipp Herrador León

14. November 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieser Artikel beschäftigt sich mit dem Problem des Färbens von Karten. Der sogenannte Vier-Farben-Satz besagt, dass die Gebiete jeder ebenen Karte so mit vier Farben gefärbt werden können, dass Länder, die eine gemeinsame Grenze besitzen, nicht mit der gleichen Farbe gefärbt sind. Der Beweis dieses Satzes wurde zwar bereits 1976 gegeben (Haken), jedoch konnte dies nur mit Hilfe von Computern bewerkstelligt werden. Bis heute wurde der ursprüngliche Beweis zwar mehrfach verbessert, jedoch ist ein Beweis aus dem Buch bisher nicht in Sicht.
Da man jedoch die schwächeren Versionen des Satzes für fünf und sechs Farben beweisen kann, sollen hier diese Beweise vorgestellt werden.

2 Definitionen

2.1 Graph

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V (engl. *vertices*) von Knoten/Ecken und einer Menge E (engl. *edges*) von Kanten.

2.2 planare/ebene Graphen

Man nennt einen Graphen *planar*, wenn er sich in der Ebene (oder auf der Kugeloberfläche) zeichnen lässt, sodass sich keine Kanten überschneiden. Ist ein Graph bereits in einer solchen Darstellung, so nennt man ihn *eben*. Dann zerlegt dieser ebene Graph die Ebene (oder Sphäre) in eine endliche Anzahl von *Gebieten*. Dazu gehört insbesondere auch das äußere (unbeschränkte) Gebiet.

2.3 Der Dualgraph

Den Dualgraphen G^* zu einem Graphen $G = (V, E)$ konstruiert man, indem man in jedes Gebiet von G einen neuen Knoten legt und anschließend die Knoten benachbarter Gebiete durch Kanten verbindet, welche die gemeinsamen Kanten der Gebiete schneiden.

2.4 Der Grad eines Knotens

Unter dem *Grad* eines Knotens v versteht man die Anzahl der Kanten, die von v ausgehen. Dabei werden *Schlingen*, also Kanten, die einen Knoten mit sich selber verbinden, doppelt gezählt.

2.5 einfache Graphen

Man bezeichnet einen Graphen als *einfach*, wenn er keine *Mehrfachkanten* und *Schlingen* hat. D.h. es gibt keine Kanten, die einen Knoten mit sich selber verbinden und maximal eine Kante, die zwei Knoten $v_1, v_2 \in V$ verbindet.

3 Die Eulersche Polyederformel

3.1 Satz und Beweis

Satz Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen G mit n Ecken, e Kanten und f Gebieten gilt

$$n - e + f = 2$$

Beweis Sei $T \subseteq E$ eine minimale Kantenmenge, die alle Knoten von G verbindet. Dann nennt man T auch Kantenmenge eines *aufspannenden Baums*. Da T minimal ist, enthält der von T erzeugte Untergraph also keine Kreise.
Bilde nun den Dualgraphen G^* zu G und betrachte die Kantenmenge T^*, welche den Kanten $G \setminus T$ entspricht. D.h. T^* sind genau die Kanten von G^*, die keine Kante aus T schneiden.

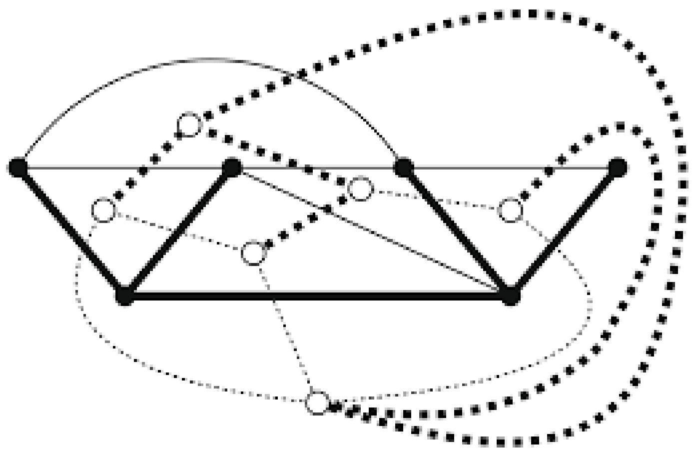

Abbildung 1: Beispiel für einen Graphen mit Dualgraphen (gestrichelt), sowie T und T^* (jeweils dicker gezeichnet)

Es lässt sich nun schnell erkennen, dass T^* ein aufspannender Baum für G^* ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass T^* alle Knoten von G^* (also alle Gebiete von G) verbindet und keine Kreise enthält. Zeige dies durch Widerspruch:

- Angenommen es gäbe einen Knoten von G^*, der nicht durch T^* verbunden wäre. Dann existiert ein Kreis von T um den Knoten, da T^* nach Definition jede Kante aus $E \setminus T$ schneidet. Da T jedoch so gewählt wurde, dass der Untergraph keine Kreise enthält, kann es also keinen solchen Knoten geben.

- Angenommen T^* würde einen Kreis enthalten. Dann läge in dem Gebiet innerhalb des Kreises ein Knoten aus G. Da T und T^* sich nicht kreuzen, könnte dieser

Knoten von G somit nicht durch T verbunden sein. Da T jedoch so gewählt wurde, dass T jeden Knoten von G verbindet, kann T^* also keinen Kreis enthalten.

Nun sind also T und T^* aufspannende Bäume von G und G^*. Für Bäume gilt die folgende Gleichung:

$$n = e + 1 \tag{1}$$

Dies kann man sich folgendermaßen überlegen: Wähle zunächst einen beliebigen Knoten als *Wurzel* des Baumes. Dann gibt es für jede Kante, die von der Wurzel weggeht genau einen Knoten am Ende der Kante, da eine Kante immer genau zwei Knoten verbindet. Für jede Kante, die von diesen Knoten weggeht, gilt das gleiche. Also gibt es für jeden Knoten abgesehen von der Wurzel genau eine Kante. Nach (1) gilt also für T und T^*:

$$n = e_T + 1 \tag{2}$$

$$f = e_{T^*} + 1 \textit{ (Da } n_{G^*} \textit{ genau die Anzahl der Gebiete von } G \textit{ ist)} \tag{3}$$

T^* wurde so definiert, dass die Kanten genau den Kanten in $E \setminus T$ entsprechen. Also gilt automatisch

$$e_T + e_{T^*} = e \tag{4}$$

Addiere nun (2) und (3)

$$n + f = (e_T + 1) + (e_{T^*} + 1) = e_T + e_{T^*} + 2 \overset{(4)}{=} e + 2$$

Daraus ergibt sich somit direkt die gesuchte Formel

$$n - e + f = 2$$

□

3.2 Folgerungen

Nun können aus der Eulerschen Formel einige Aussagen über den Durchschnittsgrad von Knoten eines Graphen gefolgert werden. Dazu sei n_i die Anzahl der Knoten von Grad i. Dann gilt offenbar

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + ... \tag{5}$$

$$\sum_{v \in V} deg(v) = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + ... \tag{6}$$

Und da für jeden Knoten nur die "Kantenenden" gezählt werden und somit jede Kante genau zweimal gezählt wird, gilt auch

$$2e = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + ... \tag{7}$$

Aus (5), (6) und (7) folgt also für den Durchschnittsgrad

$$\bar{d} = \frac{2e}{n} \tag{8}$$

Sei nun f_i die Anzahl der Gebiete, die von genau i Kanten begrenzt werden. Dann gilt

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + ... \tag{9}$$

Und da jede Kante genau zwei Gebiete begrenzt

$$2e = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + ... \tag{10}$$

Also gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} 2e - 3f &\leqslant 0 \\ \Rightarrow 3e - 3f &\leqslant e \end{aligned} \tag{11}$$

Nun können wir also den Durchschnittsgrad durch (8) und (11) abschätzen.

$$\bar{d} \overset{(8)}{=} \frac{2e}{n} \overset{(11)}{\leqslant} \frac{6n - 12}{n} < 6 \tag{12}$$

Da der Durchschnittsgrad $\bar{d} \leqslant 6$, gibt es also mindestens einen Knoten $v \in V$ mit $deg(v) \leqslant 5$.
Nun können wir anfangen das eigentliche Problem der Färbung von Graphen zu betrachten.

4 Der Fünf-Farben-Satz

4.1 Übergang von Karten zu Graphen

Um nun das Problem der Färbung von Karten auf Graphen zu übertragen, bildet man zu jeder Karte einen Graphen, indem man vorgeht wie bei der Bildung des Dualgraphen. Man platziert also in jedem Gebiet der Karte einen Knoten und verbindet die Knote benachbarter Gebiete so, dass die Kanten genau die Grenzen der Länder schneiden. Nun ist das Färben der Gebiete äquivalent zum Färben der Knoten des entstandenen Graphen, sodass Knoten, die mit Kanten verbunden sind, nicht die gleiche Farbe erhalten.
Dabei erhält man offenbar automatisch einen ebenen Graphen. Wir können auf entstandene Doppelkanten verzichten, da diese keinen Einfluss auf das Problem haben. Zudem erhalten wir keine Schlingen, da kein Gebiet sein eigener Nachbar sein kann. Wir erhalten also einen einfachen Graphen und könne somit die Folgerungen aus der Eulerschen Polyederformel anwenden.

4.2 Beweis für sechs Farben

Zunächst wollen wir also zeigen:

Behauptung Jeder ebene Graph ist 6-färbbar.

Beweis per Induktion nach n
IA: für Graphen mit n $\leqslant$ 6 ist das Problem trivial.
IS: Nehme nun an, dass die Behauptung für jeden Graphen mit k Knoten gilt
Sei nun $G = (V, E)$ ein Graph mit $k + 1$ Knoten. Dann gibt es nach (12) mindestens einen Knoten mit Grad $\leqslant 5$. Bezeichne diesen Knoten mit v. Bilde nun den Graphen $G' = G \setminus v$. Dafür entfernt man aus G den Knoten v und alle Kanten, die v mit anderen Knoten verbinden. Nach Induktionsvoraussetzung ist G' also 6-färbbar. Färbe also G' und füge v wieder ein. Da v maximal 5 Nachbarn hat, bleibt also mindestens eine Farbe übrig, um die Färbung von G' zu einer gültigen Färbung von G fortzusetzen.

$\square$

4.3 Listenfärbung

Angenommen, im Graphen $G = (V, E)$ ist für jeden Knoten $v \in V$ ist eine Menge $C(v)$ von Farben gegeben. Als *Listenfärbung* bezeichnet man eine gültige Färbung

$$c : V \to \bigcup_{v \in V} |C(v)|$$

mit

$$c(v) \in C(v) \forall v \in V$$

Die *listenchromatische Zahl* $\chi_l(G)$ ist die kleinste Zahl k, sodass für jede Liste von Farbmengen $C(v)$ mit $|C(v)| = k \; \forall \; v \in V$ eine Listenfärbung existiert.
Analog bezeichnet man die zuvor betrachtete Anzahl von Farben, die benötigt werden, um einen Graphen $G = (V, E)$ zu färben als die *chromatische Zahl* $\chi(G)$.
Man kann sich überlegen, dass für jeden Graph $\chi(G) \leqslant \chi_l(G)$ gilt.

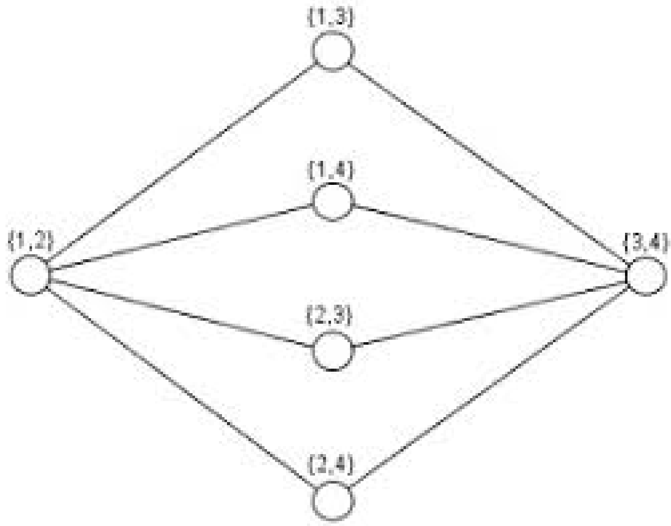

Abbildung 2: Ein Beispiel mit $\chi(G) = 2$ und $\chi_l(G) > 2$

4.4 Trigonalisierte Graphen

Man nennt einen Graphen $G(V, E)$ $fast{-}trigonalisiert$, wenn alle beschränkten Gebiete Gebiete einer Einbettung durch Dreiecke begrenzt werden. Das bedeutet, dass jedes Gebiet innerhalb des Graphen durch genau drei Kanten begrenzt wird. Man nennt einen Graphen $trigonalisert$, wenn das sogar für das äußere unbeschränkte Gebiet gilt.
Man kann sich überlegen, dass man jeden Graphen durch hinzufügen von Kanten fast-trigonalisieren kann (sogar trigonalisieren, aber diese Tatsche wird später für den Beweis benötigt).

4.5 Beweis für fünf Farben

Nun wollen wir beweisen, dass jeder Graph 5-färbbar ist. Dies ist jedoch nur ein Spezialfall der 5-listenfärbbarkeit, wenn für jedes $v \in V$ die gleiche Farbmenge von 5 Farben zur Verfügung steht. Also ist der 5-Farben-Satz bewiesen, wenn diese stärkere Aussage gezeigt wird.

Satz Alle ebene Graphen G können 5-listengefärbt werden:

$$\chi_l(G) \leqslant 5$$

Beweis Zunächst kann man sich überlegen, dass weder die listenchromatische Zahl $\chi_l(G)$ noch die chromatische Zahl $\chi(G)$ durch hinzufügen von Kanten kleiner werden kann. Also können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass der betrachtete Graph zumindest fast-trigonalisiert ist und somit eine sogar stärkere Behauptung beweisen. Sei also $G = (V, E)$ ein fast-trigonalisierter Graph und B der Kreis, der das äußere Gebiet begrenzt. Zudem wollen wir ein paar weitere Einschränkungen für die Farblisten vorgeben:

1. Zwei benachbarte Ecken x,y auf B sind bereits mit zwei verschiedenen Farben α und β gefärbt.
2. $|C(v)| \geqslant 3$ für alle anderen Knoten v auf B.
3. $|C(v)| \geqslant 5$ für alle Ecken v im Inneren.

Nun können wir den eigentlichen Beweis beginnen. Wir werden wieder Induktion nach der Anzahl n der Knoten verwenden.
IA: Für $n \leqslant 3$ ist die Aussage offensichtlich.
IS: Nehme nun also an, dass die Behauptung für $\leqslant k$ Knoten gilt und zeige, dass daraus die Aussage für $k + 1$ Knoten folgt. Dafür werden wir nun zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: Nehme an, dass der Kreis B eine Sehne hat. Das bedeutet, dass es eine Kante gibt, die nicht zu B gehört, aber zwei Knoten $u, v \in B$ verbindet. Betrachte nun die dadurch entstandenen Untergraphen.
Sei B_1 der Abschnitt des Kreises B zwischen den Knoten u, v auf dem x und y liegen. Bezeichne den anderen Kreisabschnitt als B_2. Sei G_1 der Untergraph, der durch $B_1 \cup \{u, v\}$ begrenzt wird und die Knoten x, y, u und v enthält. Dann ist G fast-trianguliert und erfüllt offenbar die Bedingungen 1, 2 und 3. Somit ist er nach Induktionsvoraussetzung 5-listenfärbbar. Weise den Knoten u, v die Farben γ, δ zu.
Betrachte nun den Untergraphen G_2, der durch $B_2 \cup \{u, v\}$ begrenzt wird. Nun sind auf diesem Kreis zwei bereits gefärbte, benachbarte Knoten u, v. Somit sind auch für G_2 die Voraussetzungen erfüllt und die Färbung kann gültig fortgesetzt werden.
Damit ist G also 5-listenfärbbar.

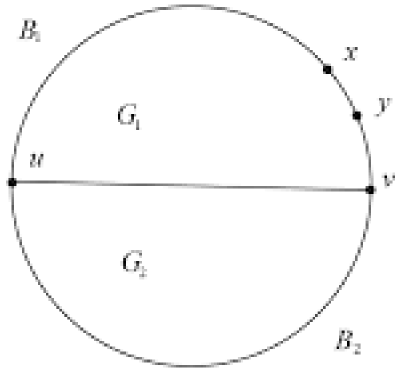

Abbildung 3: G im Fall 1

Fall 2: Betrachte nun den Fall, dass B keine Sehne hat. Auf B hat x bereits den β gefärbten Knoten y als Nachbarn. Bezeichne den anderen Nachbarn mit v_0. Bezeichne weiter den Nachbarn von v auf B mit w und die benachbarten Knoten im Inneren mit $\{v_1, ..., v_t\}$.

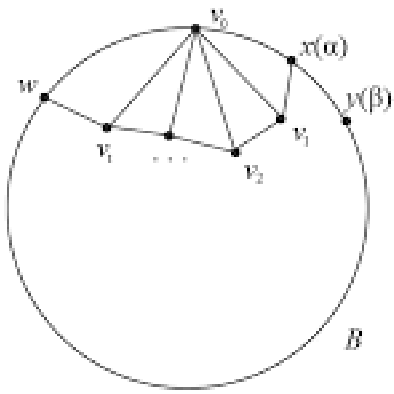

Abbildung 4: G im Fall 2

Entferne nun den Knoten v_0 und alle seine Kanten aus G. Bezeichne den dadurch entstanden Graphen mit $G' = G \setminus v_0$. Dann ist G' offenbar fast-trianguliert und wird von dem Kreis $B' = (B \setminus v_0) \cup \{v_1, ..., v_t\}$ begrenzt. Da $|C(v_0)| \geqslant 3$, gibt es also auf jeden Fall zwei Farben $\gamma, \delta \in C(v_0)$ mit $\gamma, \delta \neq \alpha$. Verändere nun die Farblisten der v_i in G',

durch $C'(v_i) = C(v_i) \setminus \{\gamma, \delta\}$. Dann sind offenbar für G' wieder die Voraussetzungen 1, 2 und 3 erfüllt, da x und y immer noch auf B' sind (1.), für alle Knoten im Inneren immer noch $|C(v)| \geqslant 5$ gilt (3.) und jetzt für die neuen v_i auf B' auch $|C(v)| \geqslant 3$ gilt (2.). Also kann der Graph G' nach Induktionsvoraussetzung 5-listengefärbt werden. Dabei wird höchstens eine der beiden Farben γ, δ für w verwendet. Da x mit $\alpha \neq \gamma, \delta$ gefärbt ist und alle anderen Nachbarn die v_i sind und diese nicht mit γ oder δ gefärbt sein können, bleibt also für v_0 mindestens eine der beiden Farben übrig. Also kann v_0 wieder eingefügt werden und die Färbung von G' zu einer gültigen Färbung von G fortgesetzt werden.
Also ist G auch in diesem Fall 5-listenfärbbar.

$\square$

5 Literatur

M. Aigner, G. M. Ziegler, Das Buch der Beweise. Springer, 5. Auflage