Drei berühmte Sätze über endliche Mengen

Jakob Becker

31. Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Der Satz von Sperner **4**

3 Der Satz von Hall **8**

4 Literatur **12**

1 Einleitung

In der folgenden Zusammenfassung des Vortrags vom 31.10.2019 wird das 30. Kapitel des Werkes „Das Buch der Beweise“ von Aigner und Ziegler thematisiert. Der Vortrag fand im Rahmen eines, zum Buch gleichnamigen, Proseminars unter der Leitung von Prof. Dr. Oleg Bogopolski statt. Hier wird jedoch nur auf zwei der drei Sätze aus dem betrachteten Kapitel „Drei berühmte Sätze über endliche Mengen“ eingegangen, da auch der Vortragende Jakob Becker nur diese beiden Sätze erläuterte.

2 Der Satz von Sperner

Der deutsche Mathematiker Emanuel Sperner stellte 1928 einen bedeutenden Satz auf, welcher sich mit Antiketten beschäftigt. Um zunächst ein grundlegendes Verständnis für Antiketten zu bekommen, folgt nun eine Definition für Antiketten:

Damit eine Antikette sinnvoll definiert werden kann, benötigen wir einen Grundraum. Dieser sei im Folgenden mit $N = \{1, 2, ..., n\}$ bezeichnet. Darauf lässt sich nun eine Antikette definieren:

Definition 1 *Eine Familie $\mathtt{F}$ von Teilmengen von N heißt Antikette, falls keine Menge aus $\mathtt{F}$ eine andere Menge aus $\mathtt{F}$ enthält.*

Dazu gleich ein kurzes Beispiel:

Beispiel: Setze den Grundraum auf $N = \{1, 2, 3, 4\}$ und füge nacheinander Teilmengen von N zu $\mathtt{F}$ hinzu. Überprüfe in jedem Schritt, ob es sich noch immer um eine Antikette handelt. Wählen wir auf natürliche Art $\mathtt{F} = \{\{1\}\}$, so behält $\mathtt{F}$ die Antiketteneigenschaft offenbar. Aus diesem Grund handelt es sich bei diesem $\mathtt{F}$ um eine Antikette. Es lassen sich nun weitere Mengen zu $\mathtt{F}$ hinzufügen. Dazu können wir einfach alle weiteren einelementigen Teilmengen von N zu $\mathtt{F}$ hinzufügen, denn einelementige Mengen sind niemals Teilmengen anderer einelementiger Mengen. Wir erhalten dadurch $\mathtt{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$. $\mathtt{F}$ ist auch maximal, was bedeutet keine andere Teilmenge von N kann noch hinzugefügt werden ohne die Antiketteneigenschaft zu verlieren. Folgende Bezeichnung verallgemeinert diesen Spezialfall:

Bezeichnung: $\mathtt{F}_k$ ist die Antikette bestehend aus allen k-elementigen Teilmengen von N.

Dass es sich dabei tatsächlich um eine Antikette handelt folgt aus „k-elementige Mengen sind niemals Teilmengen anderer k-elementigen Mengen“. Darum gibt es die eindeutige Antikette $\mathtt{F}_k$, die aus allen k-elementigen Teilmenge von N besteht.

Jetzt interessieren wir uns für die Größe einer solchen Antikette, also die Anzahl ihrer Elemente. Dazu muss man sich klar machen wie diese $\mathtt{F}_k$ konstruiert werden. Hierzu nimmt man alle Möglichkeiten aus n Elementen k auszuwählen. Da wir uns aber nun für die Anzahl der Elemente interessieren, benötigen wir auch die Anzahl aller Möglichkeiten aus n Elementen k auszuwählen, was genau durch den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ angegeben wird. Es gilt also $|\mathtt{F}_k| = \binom{n}{k}$.

Unser eigentliches Interesse gilt aber der maximalen Größe der Antiketten. Darum suchen wir nun k so, dass der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für gegebenes n maximal wird. Betrachtet man nun das Pascal'sche Dreieck fällt auf, dass für gerade n der Binomialkoeffizient an der Position $k = \frac{n}{2}$ maximal wird. Für ungerade n hingegen gibt es 2 Maxima, weshalb eines davon ausgesucht werden kann. Wir wählen hier das Maximum mit dem kleineren Wert für k, sodass das Maximum an der Position $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ angenommen wird. Da die Gaußklammern die Werte der k bei geradem n nicht verändern, können wir allgemein sagen, dass der maxima-le Binomialkoeffizient $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ist. Dass diese Größe nicht nur für diesen Spezialfall maximal ist, sondern dies auch für beliebige Antiketten gilt, sagt der Satz von Sperner:

Satz 1 *Die Mächtigkeit einer größten Antikette von Teilmengen einer n-Menge ist* $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

■ **Beweis:** Sei $\mathtt{F}$ eine beliebige Antikette. Es ist also $|\mathtt{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ zu zeigen. Dazu betrachten wir zunächst Ketten von der Form

$$\varnothing = C_0 \subsetneq C_1 \subsetneq C_2 \subsetneq \ldots \subsetneq C_n = N,$$

wobei $|C_i| = i,\ 1 \leq i \leq n$ gelten soll. Der Ablauf des Beweises ist nun folgender:

Als Vorüberlegung werden wir uns zunächst die Anzahlen von Ketten, die bestimmten Bedingungen genügen, ansehen. Der nächste Schritt ist dann daraus eine Ungleichung abzuleiten. Diese wird sich dann zu unserer Zielungleichung umformen lassen. Dafür benötigen wir jedoch zunächst das Wissen wie Ketten konstruiert werden und was Ketten unterscheidet:

Möchte man eine Kette bilden, so startet man bei C_0 und fügt ein beliebiges Element aus N hinzu. Dadurch entsteht C_1. Als nächstes fügt man ein weiteres beliebiges Element aus N zu C_1 hinzu und kommt zu C_2. Dabei ist es wichtig, dass das gewählte Element tatsächlich ein verschiedenes ist, denn ansonsten bleibt man in C_1, da $|C_2| = 2$ erfüllt sein muss. Fügt man nun alle weiteren Elemente aus N nacheinander zu den C_i hinzu, ergibt sich zum Schluss C_n. Die dadurch erhaltenen Mengen C_i bilden eine Kette. Hierbei kommt es allerdings auf die Einfügereihenfolge an, denn die Kette $C_i = \{1, \ldots, i\},\ 1 \leq i \leq n$ ist eine andere als die Kette $C_1 = \{2\},\ C_i = \{1, \ldots, i\},\ 2 \leq i \leq n$. Der Grund ist, dass für die erste Kette $C_1 = \{1\}$ ist, bei der zweiten Kette aber $C_1 = \{2\}$ gilt. Zwei Ketten sind also nur dann gleich, wenn auch alle C_i die selben Elemente enthalten. Mit dieser Erkenntnis können wir uns jetzt die Anzahlen von Ketten mit bestimmten Eigenschaften anschauen:

Um ein Gefühl dafür zu bekommen in welchem Bereich sich die Anzahlen der Ketten aufhalten können, interessieren wir uns erst einmal für die obere Schranke, also die Anzahl aller Ketten. Dazu der folgende Gedankengang:

Anzahl aller Ketten:
Ketten werden durch das Hinzunehmen von verschiedenen Elementen aus N konstruiert, wobei es auf deren Reihenfolge ankommt. Man könnte dies also auch als Urnenmodell deuten, wobei die Kugeln ohne Zurücklegen aber mit Beachtung der Reihenfolge gezogen werden. Die Anzahl der Möglichkeiten dafür ist aus der Stochastik bekannt und gegeben durch $\frac{n!}{(n-k)!}$. Hierbei ist n die Anzahl der Kugeln und k die Anzahl der Züge. Da wir aber jedes Element ziehen gilt $n = k$. Weiterhin wissen wir, dass $0!$ als 1 definiert ist. Somit folgt, dass die Anzahl aller Ketten $n!$ ist.

Der nächste entscheidende Gedanke ist, herauszufinden wie viele Ketten ein gegebenes $A \in \mathtt{F}$ enthalten. Um diese Anzahl sinnvoll bestimmen zu können setzen wir $|A| = k$. Zudem muss noch gesagt werden, wann eine Kette A enthält.

Dies ist der Fall, wenn alle k Elemente aus A hintereinander stehen, also falls $C_k = A$ gilt. Damit folgt:

Anzahl aller Ketten mit gegebenen $A \in \mathtt{F}$, $|A| = k$:
Da alle k Elemente aus A hintereinander stehen müssen damit die Kette A enthält, betrachten wir die Ketten aufgeteilt und zwar so:

$$C_0 \subsetneq \ldots \subsetneq C_k \subsetneq C_{k+1} \subsetneq \ldots \subsetneq C_n$$

Befüllen wir nun zunächst $C_0 \subsetneq \ldots \subsetneq C_k$, ergeben sich hier, mithilfe der Anzahl aller Ketten, $k!$ Ketten. Analog läuft dies für $C_{k+1} \subsetneq \ldots \subsetneq C_n$, wo sich entsprechend $(n-k)!$ Ketten ergeben. Fügt man die dadurch erhaltenen Ketten zusammen, bekommt man insgesamt $k!(n-k)!$ Ketten. Dahinter steht folgende Überlegung: Fixiert man den vorderen Teil und permutiert den hinteren $(n-k)!$ Mal, bekommt man $(n-k)!$ verschiedene Ketten. Fixiert man im vorderen Teil nun eine andere Teilkette und permutiert den hinteren Teil wieder $(n-k)!$ Mal, hat man schon $2 \cdot (n-k)!$ verschiedene Ketten. Da der vordere Teil nun auf $k!$ verschiedene Weisen fixiert werden kann, ergeben sich insgesamt $k!(n-k)!$ verschiedene Ketten. Also wird die Anzahl aller Ketten mit gegebenen $A \in \mathtt{F}$ durch $k!(n-k)!$ festgelegt.

Bevor wir uns der letzten Anzahl an Ketten widmen, zuerst noch eine Bezeichnung. Diese wird uns dabei helfen, die letzte Anzahl an Ketten zu verstehen:

Bezeichnung: m_k bezeichne die Anzahl der k-elementigen Mengen in $\mathtt{F}$.

Eine Gleichung die sofort aus dieser Bezeichnung folgt ist $|\mathtt{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k$, denn es handelt sich dabei um die Anzahl aller $0, \ldots, n$-elementigen Mengen in $\mathtt{F}$ aufsummiert. Dies ist gerade die Anzahl der Elemente von $\mathtt{F}$.

Damit lässt sich nun überlegen, wie die Anzahl aller Ketten die irgendeine Menge aus $\mathtt{F}$ enthalten ist:

Anzahl aller Ketten die irgendeine Menge aus $\mathtt{F}$ enthalten:
Die Bezeichnung „irgendeine“ soll hier deutlich machen, dass wir uns zunächst ein $A \in \mathtt{F}$ vorgeben und dafür die Anzahl aller Ketten betrachten. Diese ist bekanntermaßen $k!(n-k)!$, falls A k-elementig ist. Dann nehmen wir uns eine weitere Menge aus $\mathtt{F}$ und betrachten auch für diese Menge, wie viele Ketten diese Menge enthalten. Diesen Schritt führen wir solange durch, bis wir alle Menge in $\mathtt{F}$ betrachtet haben und summieren die Anzahl aller erhalten Ketten auf. Dabei fällt auf, dass es gar nicht relevant ist welche Elemente A enthält, sondern nur wie viele Elemente A fasst. Somit bekommen wir durch $\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)!$ die Anzahl der Ketten die irgendeine Menge aus $\mathtt{F}$ enthalten.

Daraus lässt sich nun eine Ungleichung ableiten, denn die Anzahl aller Ketten ist sicherlich größer gleich der Anzahl aller Ketten die irgendeine Menge aus $\mathtt{F}$ enthalten. Darum folgt:

$$\sum_{k=0}^{n} m_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} m_k \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

Wir sehen, dass wir so den Binomialkoeffizienten in unsere Ungleichung gebracht haben und da wir in der letzten Ungleichung durch den Binomialkoeffizienten teilen, können wir dort auch einfach den größten Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ einsetzen. Dadurch schätzen wir unsere Summe nach unten ab und bleiben folglich auch kleiner gleich 1. Nun hängt dieser größte Binomialkoeffizient aber nicht mehr von k ab und wir können ihn vor die Summe schreiben. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \sum_{k=0}^{n} m_k \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} m_k = |\mathtt{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Wir haben also die zu zeigende Ungleichung erhalten, sodass die Behauptung folgt und der Beweis beendet ist.

$\square$

3 Der Satz von Hall

Im Jahre 1935 stellte Philip Hall, ein englischer Mathematiker, einen Satz auf, welcher die Grundlage des heute fast unüberschaubaren Gebietes der Matching-Theorie bildet. Zudem trägt er den Beinamen „Heiratssatz". Wir wollen uns anschauen, was diesen Satz so besonders macht.

Da der Satz von Hall eine genaue Aussage dazu trifft, ob ein System verschiedener Vertreter, kurz SDR (für „**s**ystem of **d**istinct **r**epresentatives"), existiert, müssen wir uns zunächst einmal ansehen was ein System verschiedener Vertreter überhaupt ist. Um eine Definition angeben zu können, benötigen wir jedoch zuvor noch zwei mathematische Objekte. Eines davon ist die Grundmenge, diesmal mit X bezeichnet, welche endlich sein soll. Das zweite ist eine Folge von Mengen $A_1, ..., A_n \subseteq X$. Die Mengen müssen weder paarweise verschieden sein, noch ist es ausgeschlossen dass sie die leere Menge sind, die einzige Forderung ist, dass die Elemente in den A_i Elemente aus X sind. Damit lässt sich ein System verschiedener Vertreter definieren:

Definition 2 *$x_1, ..., x_n$ heißt System verschiedener Vertreter, falls*
(i) x_i paarweise verschieden für $1 \leq i \leq n$
(ii) $x_i \in A_i$ für $1 \leq i \leq n$

Insbesondere ist damit klar, warum die x_i mit x bezeichnet wurden, denn es gilt $x_i \in X$, was aus $A_i \subseteq X$ folgt. Geben wir uns nun noch die Menge $\{1, ..., n\}$ vor, so haben wir alle Objekte um zu verstehen, warum der Satz den Beinamen Heiratssatz verdient:

Der Satz von Hall besitzt eine Analogie, welche eine Massenhochzeit beschreibt. Dabei gibt es Jungen und Mädchen. Das Ziel ist es nun, dass die Mädchen und Jungen so heiraten, dass jedes Mädchen genau einmal und jeder Junge höchstens einmal heiratet. Die Bedingung für eine Heirat ist hierbei, dass das Mädchen den geheirateten Jungen mag. Heiratet jetzt jedes Mädchen unter diesen Voraussetzungen, also es mag den geheirateten Jungen und dieser ist auch noch nicht an ein anderes Mädchen verheiratet worden, so wird dies eine Massenhochzeit genannt.

Nun möchten wir den vier Objekten, Jungen, Mädchen, Heiratskandidaten und Massenhochzeit, einen mathematischen Sinn beimessen. Wir sagen also X entspricht den Jungen, es gibt also endlich viele Jungen. Außerdem soll $\{1, ..., n\}$ den Mädchen entsprechen, es gibt also n Mädchen. Da die A_i nun Elemente aus X, also Jungen, enthalten, sagen wir, dass A_i die Heiratskandidaten für Mädchen i beinhaltet. Somit bleibt nur noch die Entsprechung $x_1, ..., x_n$ und Massenhochzeit über, welche auch sinnvoll ist. Bei einer Massenhochzeit darf kein Junge doppelt heiraten, was dadurch gegeben ist, dass die x_i paarweise verschieden sind. Zudem muss das Mädchen den geheirateten Jungen mögen, was durch $x_i \in A_i$ sichergestellt wird.

Damit haben wir jetzt alles gegeben, um den Satz von Hall verstehen zu können:

Satz 2 *Sei $A_1, A_2, ..., A_n$ eine Familie von Teilmengen einer endlichen Menge X. Ein System von verschiedenen Vertretern für diese Folge existiert dann und* *nur dann, wenn für* $1 \le m \le n$ *jede Vereinigung von* m *Mengen* A_i *mindestens* m *Elemente enthält.*

oder die Kurzform, welche insbesondere für die konkrete Anwendung des Satzes nützlich ist:

Satz 3 *Ein SDR existiert genau dann, wenn* $|\bigcup_{i=1}^{m} A_i| \ge m$ *für alle* $1 \le m \le n$ *gilt.*

Hier ein Beispiel zu dem bisher gelernten:

Beispiel: Sei $X = \{1,2,3,4\}$ und $A_1 = \{1,2\},\ A_2 = \{2\}$ und $A_3 = \{1\}$. Es gibt also 4 Jungen und 3 Mädchen, womit erst einmal prinzipiell eine Massenhochzeit möglich ist, da genug verschiedene Jungen für die Mädchen existieren. Zudem sind die Heiratskandidaten der Mädchen angegeben, sodass wir jetzt mithilfe des Satzes von Hall nachprüfen können, ob eine Massenhochzeit möglich ist. Dazu betrachten wir $1 \le m \le n = 3$, also $m = 1, m = 2$ und $m = 3$:

$m = 1$: Hier ist $|\bigcup_{i=1}^{m=1} A_i| = |A_1| \ge 1 = m$ zu überprüfen und da die A_i umnummeriert werden können, müssen $A_1,\ A_2$ und A_3 betrachtet werden. Es gilt $|A_1| = 2$ und $|A_2| = |A_3| = 1$, womit hier die Bedingung erfüllt ist.

$m = 2$: In diesem Fall muss $|\bigcup_{i=1}^{m=2} A_i| \ge 2 = m$ geprüft werden und das, wegen der Umnummerierung, ebenfalls wieder in allen möglichen Kombinationen. Hier gilt $|A_1 \cup A_2| = |A_1 \cup A_3| = |A_2 \cup A_3| = |\{1,2\}| = 2$, sodass auch hier alles stimmt.

$m = 3$: Was jetzt noch über bleibt, ist alle Mengen zu vereinigen und dann $|\bigcup_{i=1}^{m=3} A_i| \ge 3 = m$ zu prüfen. Also $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |\{1,2\}| = 2$, und da $2 < 3$ gilt, ist die Bedingung in diesem Fall nicht erfüllt und der Satz von Hall sagt uns, dass kein SDR existieren kann.

Dies möchten wir nun auch noch einmal ohne den Satz von Hall verifizieren. Dazu bilden wir einfach alle möglichen Heiratskombinationen und schauen jeweils, ob eine Massenhochzeit möglich ist. Da A_2 und A_3 ohnehin einelementig sind, bleibt uns nur bei A_1 die Elementwahl.

Möglichkeit 1: Mädchen 1 heiratet Junge 1. Daraus folgt dann, dass Mädchen 3 nicht mehr Junge 1 heiraten kann, denn dieser darf nur einmal heiraten. Das System von Vertreter wäre also 1,2,1, aber da die 1 doppelt vorkommt ist es kein System von verschiedenen Vertretern.

Möglichkeit 2: Mädchen 1 heiratet Junge 2. Daraus folgt dann, dass Mädchen 2 nicht mehr Junge 2 heiraten kann. Das System von Vertretern wäre hier 2,2,1, aber da die 2 doppelt vorkommt ist es kein System von verschiedenen Vertretern.

In beiden Möglichkeiten ließ sich kein SDR konstruieren, sodass unter diesen Bedingungen kein SDR existieren kann.

Angenommen A_3 wäre jetzt der Form $A_3 = \{1,3\}$, also Mädchen 3 mag nun auch Junge 3. Betrachtet man nun $m = 3$, so gilt:

$m = 3$: Es gilt $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |\{1,2,3\}| = 3$, und weil $3 \geq 3$ ist, folgt nach dem Satz von Hall, dass ein SDR existieren muss, denn die Fälle $m = 1$ und $m = 2$ bleiben erfüllt.

Da wir $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2\}$ und $A_3 = \{1,3\}$ haben, lässt sich einfach die 1 aus A_1, die 2 aus A_2 und die 3 aus A_3 wählen, welche zusammen das SDR 1,2,3 bilden.

Also stimmt der Satz von Hall offenbar für dieses Beispiel. Dass dieser auch für den allgemeinen Fall wahr bleibt, zeigt der Beweis:

■ **Beweis:** Per Induktion über n.

Induktionsanfang: $n = 1$.
Hier gilt $1 \leq m \leq n = 1 \rightsquigarrow m = 1$ und $A_1, ..., A_n \rightsquigarrow A_1$, weshalb ein SDR existieren muss, falls $|\bigcup_{i=1}^{m=1} A_i| = |A_1| \geq 1 = m$ gilt. Damit gilt der Induktionsanfang, denn $|A_1| < 1$ bedeutet $|A_1| = 0$. Daraus folgt dann $A_1 = \varnothing$, und da A_1 hier keine Elemente hat, lässt sich auch kein Vertreter wählen, sodass ein SDR nicht existieren kann. In allen anderen Fällen, also für $|A_1| \geq 1$, lässt sich ein Vertreter aus A_1 finden, welcher zudem auch paarweise verschieden zu allen anderen gewählten Vertretern ist, da hier keine anderen Vertreter gewählt werden. Daraus folgt der Induktionsanfang.

Induktionsschluss: $n - 1 \to n$.
Jetzt möchten wir eine Fallunterscheidung machen, wobei diese über die Existenz von kritischen Familien geht. Zu diesem Zweck hier die Definition einer kritischen Familie:

Definition 3 *Eine Unterfamilie $A_1, ..., A_l$, $1 \leq l < n$ von $A_1, ..., A_n$ heißt kritisch, falls ihre Vereinigung genau l Elemente enthält, also falls $|\bigcup_{i=1}^{l} A_i| = l$ gilt.*

Unterscheide die Fälle:

Fall 1: Es existiert keine kritische Familie.
Da keine kritische Familie existiert, muss $|\bigcup_{i=1}^{m} A_i| \geq m + 1$ gelten. Insbesondere folgt damit $|\bigcup_{i=1}^{m=1} A_i| \geq 2 = m + 1$, weshalb jedes der A_i mindestens 2 Elemente enthält. Wähle also $x \in A_n$ und betrachte $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_{n-1}$ mit $\tilde{A}_i = A_i \setminus \{x\}$. Nun wurde höchstens ein Element aus den Mengen $A_1, ..., A_{n-1}$ herausgenommen und es gilt jetzt $|\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{A}_i| \geq m$. Dabei handelt es sich aber genau um die Bedingung des Satzes, sodass sich die Induktionsvoraussetzung anwenden lässt und sich $x_1, ..., x_{n-1}$ ergibt. Es fehlt also nur noch x_n, welches die Bedingungen $x_n \in A_n$ und x_n paarweise verschieden zu $x_1, ..., x_{n-1}$ erfüllen muss. Wir haben aber mit x gerade ein solches Element konstruiert, sodass sich einfach $x_n = x$ wählen lässt. Damit ergibt sich das SDR $x_1, ..., x_{n-1}, x_n = x$ wie gewünscht.

Fall 2: Es existiert eine kritische Familie.
Hier ist „eine“ kritische Familie im mathematischen Sinne zu verstehen, was mindestens eine meint, sodass mit Beweis dieses Falls auch tatsächlich alle Fälle

abgedeckt sind. Es existiert also auf jeden Fall eine kritische Familie, welche durch geeignete Umnummerierung $A_1, ..., A_l$ sei. Es gilt folglich $|\bigcup_{i=1}^{l} A_i| = \tilde{X}$ mit $|\tilde{X}| = l$. Da $l < n$ ist, lässt sich die Induktionsvoraussetzung anwenden und es ergibt sich das SDR $x_1, ..., x_l$ für $A_1, ..., A_l$. Wir brauchen somit nur noch ein SDR für $A_{l+1}, ..., A_n$. Betrachtet man zunächst nur m von diesen Mengen und vereinigt diese zu $A_1, ..., A_l$ hinzu, so hat die Vereinigung mindestens $l + m$ Elemente, in Symbolen $|\bigcup_{i=1}^{l+m} A_i| \geq l+m$. Daraus lässt sich schließen, dass die m betrachteten Mengen mindestens m Elemente außerhalb von $\tilde{X}$ haben, weshalb die Bedingung des Satzes auch für $A_{l+1} \setminus \tilde{X}, ..., A_n \setminus \tilde{X}$ erfüllt ist. Wir wissen, dass $n - l < n$ gilt. Damit können wir die Induktionsvoraussetzung auch auf $A_{l+1} \setminus \tilde{X}, ..., A_n \setminus \tilde{X}$ anwenden und erhalten das SDR $x_{l+1}, ..., x_n$. Fügt man die beiden Systeme verschiedener Vertreter $x_1, ..., x_l$ und $x_{l+1}, ..., x_n$ zusammen, ist $x_1, ..., x_n$ nicht automatisch ebenfalls ein SDR, denn dass die Elemente paarweise verschieden sind ist nicht sichergestellt. Der Grund dafür, dass es sich in unserem Fall aber trotzdem um ein SDR handelt ist folgender: Die $x_1, ..., x_l$ kommen aus $\tilde{X}$, die $x_{l+1}, ..., x_n$ aber aus dem Komplement von $\tilde{X}$. Folglich sind die x_i hier doch paarweise verschieden und natürlich gilt auch weiterhin $x_i \in A_i$, womit $x_1, ..., x_n$ doch ein SDR ist. Es sind also alle Fälle abgehandelt und der Beweis ist damit beendet.

□

4 Literatur

M. Aigner, G. M. Ziegler, Das Buch der Beweise. Springer, 5.Auflage (S.236-242)