Vorstellung der Lösung zu Hilberts 3. Problem

Torben Schmitz

31. Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Vorstellung des Problems

In diesem Artikel soll es um eine Lösung des 3. Hilbertschen Problems gehen. Hierfür wird das entsprechende Kapitel aus dem Buch der Beweise von Aigner und Ziegler vorgestellt

Der herausragende Mathematiker David Hilbert stellte im Rahmen eines Vortrags auf einem Mathematikerkongress 1900 in Paris eine Liste mit 23 seiner Meinung nach bedeutenden Promblemen der Mathematik vor. Darunter das dritte dieser Probleme, welchs sich mit der Zerlegung von Polyedern beschäftigt.

Das Problem wurde von Hilberts Schüler Max Dehn bereits im Jahre 1900 zum Teil und im Jahr 1902 vollständig gelöst.

Die Lösung die hier vorgestellt wird ist allerdings eine über die Jahre vereinfachte Variante.

Hilberts Problem wird im Buch folgendermaßen zitiert.

> *„zwei Tetraeder gleicher Grundfläche und gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in kongruente Tetraeder zerlegen lassen und die sich auch durch das Hinzufügen kongruenter Tetraeder nicht in solche Polyeder ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in kongruente Tetraeder möglich ist.“*

Für die Verständlichkeit des Problems werden zunächst einige Begriffe erklärt, die für das Verständnis des Problems selber und der folgenden Lösung benötigt werden.

1.2 Begriffserklärung

1.2.1 Kongruenz

Zwei Polyeder heißen kongruent, falls zwischen ihnen eine Kongruenzabbildung existiert, welche eine Verknüpfung von Translation, Spiegelung und Rotation sein kann. Anschaulich bedeutet dies, erklärt anhand zweidimensionaler Polygone, dass man den einen so verschieben, spiegeln und drehen kann, dass er den anderen genau überdeckt.

1.2.2 Zerlegungsgleichheit

Der Begriff Zerlegungsgleichheit wird im folgenden mit ZG abgekürzt. Die formale Definition lautet.

> Zwei Polyeder P,Q sind ZG, wenn man sie in endliche Mengen von Polyedern $P_1 \cup \cdots \cup P_n$ bzw. $Q_1 \cup \cdots \cup Q_n$ zerlegen kann, so dass P_i und Q_i für jedes $1 \leq i \leq n$ kongruent sind.

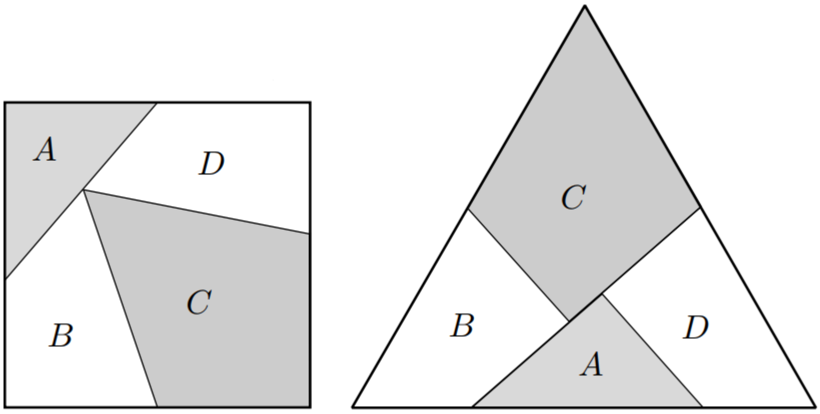

Abbildung 1: Zerlegung eines Qudrates und eines Vierecks von Henry Dudeney(1902)

1.2.3 Ergänzungsgleichheit

Die Ergänzungsgleichheit, im folgenden mit EG abgekürzt, wird folgendermaßen definiert.

> Zwei Polyeder P,Q sind EG, wenn es ZG Polyeder $\tilde{P} = P_1'' \cup \cdots \cup P_n''$ und $\tilde{Q} = Q_1'' \cup \cdots \cup Q_n''$ gibt, die Zerlegungen unter Verwendung von P und Q von der Form $\tilde{P} = P \cup P_1' \cup \cdots \cup P_m'$ und $\tilde{Q} = Q \cup Q_1' \cup \cdots \cup Q_m'$ haben, wobei P_k' und Q_k' kongruent sind für alle k.

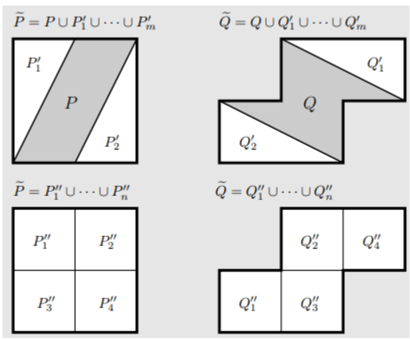

Abbildung 2: Beispiel zur Ergänzungsgleichheit zweier Polygone

1.2.4 Kanten(abschnitte)

Wenn an einem Polyeder eine Zerlegung vorgenommen wird haben die Teilpolyeder im inneren Kanten. Wenn diese Kanten und Ecken anderer Polyeder berühren, werden sie in Kantenabschnitte Eingeteilt. Bei zweidimensionalen Polygonen können nur Ecken zur Aufteilung in Kantenabschnitte führen, bei Polyedern im Raum hingegen ist dies auch durch andere Kanten möglich.

1.2.5 Diederwinkel

Die Winkel zwischen den Flächen eines Polyeders werden Diederwinkel genannt. Die Diederwinkel in einem Quadrat oder Quader sind zum Beispiel alle $\frac{\pi}{2}$. In einem Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche hat man die Diederwinkel $\frac{\pi}{2}$ zwischen den Aussenflächen und der Grundfläche, sowie $\frac{\pi}{3}$ zwischen den Aussenflächen.

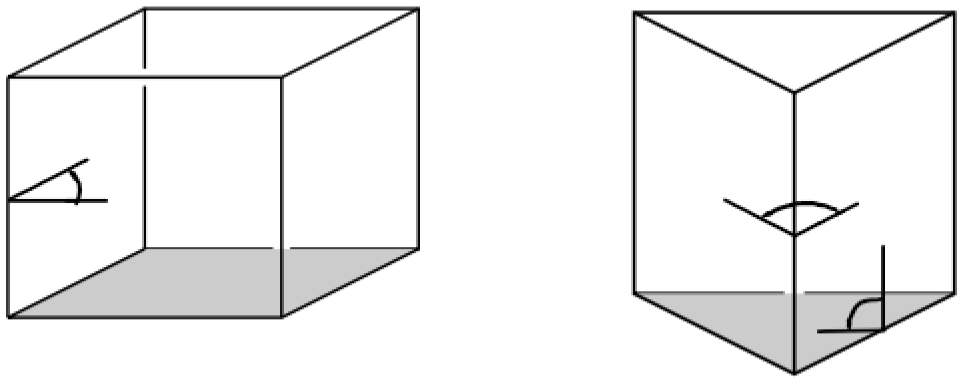

Abbildung 3: Quadrat und Prisma mit den beschriebenen Diederwinkeln

2 Lösung des Problems

2.1 Einige Lemmata zur Konstruktion der Lösung

Nach der Klärung der Begriffe lässt sich Hilberts Problem nun folgendermaßen beschreiben. Aufgabe ist es, zwei Tetraeder zu finden, die zwar die gleiche Höhe und die gleiche Grundfläche haben, aber nicht ZG oder EG sind. Dass zwei Tetraeder, die die beiden Eigenschaften hätten die gleiche Grundfläche und Höhe und damit das gleiche Volumen haben müssten ist klar. Die Frage ob es zwei solche Tetraede gibt, die nicht ZG oder EG sind ist allerdings nicht klar, da in der Ebene den Satz von Bolyai Gerwien gilt, der besagt, dass ebene Polygone mit gleicher Fläche ZG und EG sind.

Um zum Schluss 2 Tetraeder mit der gesuchten Eigenschaft zu konstruieren werden im Folgenden einige Lemmata aufgestellt und bewiesen.

2.2 Perlen-Lemma

> *Wenn zwei Polyeder P und Q ZG sind, dann kann man die Kantenabschnitte in den Zerlegungen $P = P_1 \cup \cdots \cup P_n$ und $Q = Q_1 \cup \cdots \cup Q_n$ so mit einer positiven Zahl von Perlen belegen (ihnen eine positive natürliche Zahl zuweisen) dass jede Kante eines Bruchstückes P_k dieselbe Anzahl von Perlen enthält, wie die entsprechende Kante von Q_k*

Wie man sich so eine Aufteilung mit Perlen vorstellen muss, zeigt die Abbildung 4.

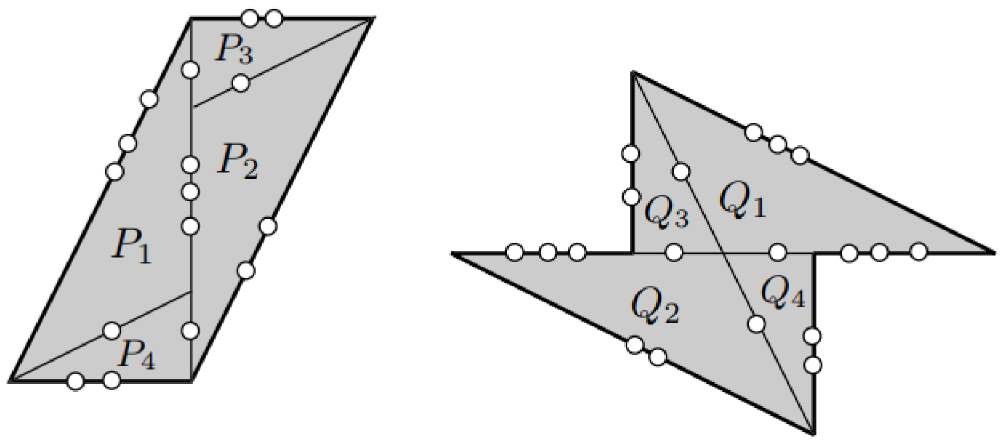

Abbildung 4: Die Figuren P, Q aus dem Beispiel zur Ergänzungsgleichheit, diesmal in zerlegter Form

Beweis: Wie auch in Abb. 4 zu sehen weist man den einzelnen Kantenabschnitten s_i die Perlen zu, diese können wir auch als Zahlen, bzw. Variablen x_i auffassen. Dies tun wir für alle Kantenabschnitte. Summiert man die Perlen auf den Kantenabschnitten einer Kante auf , muss, damit das Perlen Lemma gilt, die Summe aller Perlen auf den Abschnitten der entrsprechenden Kante in der anderen Figur, die gleich sein. Damit erhalten wir für jede Kante eine Gleichung der Form

$$\sum_{i:s_i \subseteq e} x_i - \sum_{j:s'_j \subseteq e'} y_j = 0$$

Es ergibt sich also ein Gleichungssystem, sodass wenn dieses eine Lösung mit natürlichen Zahlen besitzt, das Perlen-Lemma bewiesen ist. Nun ist anzumerken, dass, da die einzelnen Polyeder in den Zerlegungen kongruent sind, deren Kanten die gleiche Länge haben und somit diese Längen das Gleichungssystem lösen. Da die Längen aber auch reell sein können braucht man zum Beweis noch das folgende Lemma.

2.3 Kegel-Lemma

> *Wenn ein System von homogenen Linearen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten eine positive* ***reelle*** *Lösung hat, dann hat es auch eine positive* ***ganzzahlige*** *Lösung.*

Beweis: Zuerst einmal spezifiziert man die Menge, der positiven reellen Lösungen eines Systems von homogenen Linearen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0, x > 0\}$$

Ist dieses nicht leer, so ist folgende Menge ebenfalls, nicht leer, da die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ein Vektorraum ist und die Multiplikation einer Lösung mit einem positiven Skalar weiterhin eine Lösung ist.

$$\bar{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0, x \geq 1\}$$

Weiterhin reicht uns eine Lösung mit rationalen Einträgen, da die Multiplikation aller Einträge mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner, eine ganzzahlige Lösung liefert. Nun ist anzumerken, dass folgende Äquivalenz besteht.

$$a^t x = 0 \Leftrightarrow a^t x \geq 0,\ a^t x \leq 0$$

Die Gleichung $Ax = 0$ ist also äquivaltent zur Gleichung $A'x = 0$ wobei A' aus A und $-A$ übereinander geschrieben besteht. Damit ist das Problem weiter verallgemeinert zu der Frage, ob folgendes System eine rationale Lösung besitzt, wenn es eine reelle Lösung besitzt.

$$Ax \geq b, x \geq 1$$

Hier kann b nun eine beliebige ganze Zahl sein. Nun ist $A \in \mathbb{Z}^{MxN}$ und der Beweis wird mittels Indunktion über N geführt.

IA Sei N = 1 das Gleichungssstem ist also der Form $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$. Nun existiert eine reelle Lösung für x, setzt man diese ein erhält man mehrere echte Ungleichungen und/oder Gleichungen. Falls sich eine solche Gleichung $a_i x = b_i$ ergibt so ist $x = \frac{b_i}{a_i} \in \mathbb{Q}$ und die Induktionsannahme wäre bewiesen, man kann also davon ausgehen, dass nur echte Ungleichungen vorliegen. Diese Ungeleichungen können folgendermaßen, je nach Vorzeichen von a_i umgestellt werden.

$$x_i > \frac{b_i}{a_i} \text{ oder } x_i < \frac{b_i}{a_i}$$

x besitzt also obere und/oder untere Schranken, nun liegt aber zwischen einer reellen Zahl und einer rationalen immer eine weitere rationale. Betrachtet man also die kleinste obere und größte untere Schranke für x, liegt zwischen x und diesen jeweils ein Bruch.

$$\frac{b_i}{a_i} < \frac{p}{q} < x_i < \frac{r}{s} < \frac{b_i}{a_i}$$

Damit ist die Induktionsannahme gezeigt.

IS Sei $A \in \mathbb{Z}^{MxN+1}$ und das Kegel Lemma gelte für $B \in \mathbb{Z}^{MxN}$ Das Gleichungssystem ist nun der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen der existierenden reellen Lösung ergeben sich wieder echte Ungleichungen und/oder Gleichungen. Falls es eine Gleichung gibt, kann man diese nach $x_N + 1$ umstellen.

$$x_{N+1} = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{iN}x_N}{a_{iN+1}}$$

Setzt man für x_{N+1} nun den Bruch ein, erhält man ein System in N Variablen und die Induktionsannahme greift. Man kann sich also wieder darauf beschränken, dass nur echte Ungleichungen vorliegen. Diese können aber wieder umgestellt werden. Sodass folgende Gleichungen entstehen.

$$a_{1N+1}x_{N+1} > b_1 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1N}x_N$$

$$\vdots$$

$$a_{MN+1}x_{N+1} > b_M - a_{M1}x_1 - \cdots - a_{MN}x_N$$

Wie vorher liegen nun zwischen diese reellen Zahlen (reell wegen der x_i) wieder rationale Zahlen.

$$a_{1N+1}x_{N+1} > \frac{p_1}{q_1} > b_1 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1N}x_N$$

$$\vdots$$

$$a_{MN+1}x_{N+1} > \frac{p_M}{q_M} > b_M - a_{M1}x_1 - \cdots - a_{MN}x_N$$

Der rechte Teil ist ein System in N Variablen und hat nach Induktionsannahme eine Lösung, der linke Teil ist ein System in 1 Variable. Dass dieses eine Lösung hat, wurde bereits gezeigt.

2.4 Bricardsche Bedingung

Mit dem Perlen-Lemma ist es nun möglich die Bricardsche Bedingung zu beweisen, anhand derer schlussendlich die zwei benötigten Tetraeder konstruiert werden können, sie lautet folgendermaßen.

> *Wenn zwei 3-dimensionale Polyeder P und Q mit Diederwinkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ bzw. $\beta_1, \dots, \beta_s$ zerlegungsgleich sind, dann gibt es positive ganze Zahlen m_i, n_j und eine ganze Zahl k mit*
>
> $$m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r \; = n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s + k\pi$$
>
> *Dasselbe gilt auch, wenn P und Q nur ergänzungsgleich sind.*

Beweis: Der Beweis wird für Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit getrennt geführt, da für den Beweis bei Ergänzungsgleichheit Teile des Beweises für die Zerlegungsgleichheit benötigt werden wird die Bedingung zuerst für Zerlegungsgleichheit bewiesen. Unter der Annahme, dass P und Q ZG sind können wir die entsprechende Zerlegung vornehmen und den Kantenabschnitten gemäß Perlen-Lemma Perlen zuweisen. Nun betrachtet man für alle Polyeder in der Zerlegung die Diederwinkel und summiert sie auf und zwar für jeden Polyeder und jede Perle.

Nun werden Fälle unterschieden, mit welchem Winkel eine Perle insgesamt in diese Summe miteinfließt, je nachdem auf was für einer Kante sie liegt. Sie kann auf einer Kante der ursprünglichen Polyeder P und Q liegen (Fall 1), Auf einer Kante im inneren, die Kante von mehreren Polyedern der Zerlegung ist, so dass sie nicht auf einer Fläche eines anderen Polyeders liegt (Fall 2), oder, so dass sie dies tut (Fall 3).
Man erkennt schnell, dass sich alle Diederwinkel in Fall 1 zum Diederwinkel der ur-

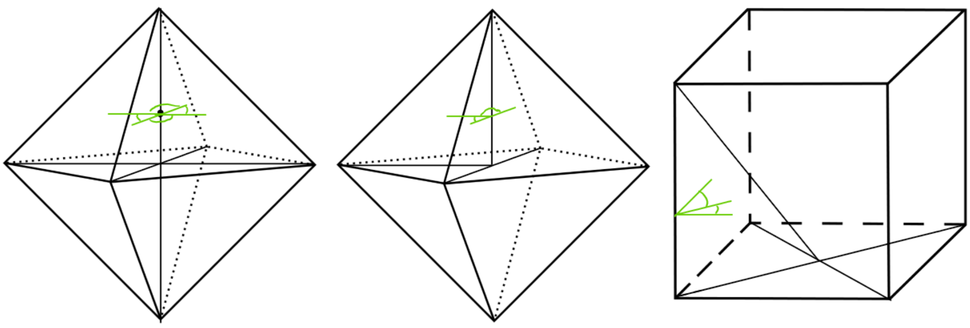

Abbildung 5: Beispiel für die möglichen Fälle von Diederwinkeln an einer Perle

sprünglichen Form, die Diederwinkel in Fall 2 zu 2π und in Fall 3 zu π aufsummieren. Liegt eine Perle auf einer Kante, die auf einer Fläche des Ursprünglichen Polyeders liegt, so ist dies wie Fall 3 zu betrachten. Da die einzelnen Polyeder, die in die Summe reinspielen aber alle Kongruent sind und auf den Kanten die gleiche Zahl von Perlen liegt, müssen die Summen gleich sein. Man erhält.

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r \ + k_1\pi = n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s + k_2\pi$$

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r \ = n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s + (k_2 - k_1)\pi$$

Das setzen von $k = k_2 - k_1$ zeigt die Bricardsche Bedingung für Zerlegungsgleichheit.

Um zu zeigen, dass die Bricardsche Bedingung ebenfalls bei Ergänzungsgleichheit gilt kann man die Zerlegung nur für die ergänzten Figuren $\tilde{P}$ und $\tilde{Q}$ betrachten. Bei diesen werden wieder Perlen auf die Kantenabschnitte gelegt, aber auf die Aussenkanten von $\tilde{P}$ und $\tilde{Q}$ werden in allen Zerlegungen die gleiche Anzahl an Perlen gelegt, was im Beweis zum Perlen-, bzw. Kegel-Lemma nicht zu Problemen führt. Nun sei $\sum_1^{'}$ die Summe an Diederwinkeln in $\tilde{P} = P \cup P_1' \cup \cdots \cup P_n'$, bzw $\sum_2^{'}$ in $\tilde{Q} = Q \cup Q_1' \cup \cdots \cup Q_n'$, weiterhin betrachten wir $\sum_1^{''}$ die Summe an Diederwinkeln in $\tilde{P} = P_1'' \cup \cdots \cup P_m''$ und $\sum_2^{''}$ die Summe in $\tilde{Q} = Q_1'' \cup \cdots \cup Q_m''$. Aus dem Beweis für Zerlegungsgleichheit ist bekannt, dass $\sum_1^{''} = \sum_2^{''}$. Da $\sum_1^{'}$ und $\sum_1^{''}$ die Zerlegung des gleichen Polyeders in unterschiedliche Stücke beschreibt und auf den Aussenkanten in beiden Zerlegungen die gleiche Zahl an Perlen liegt, unterscheiden sie sich nur um ein Vielfaches von π, da die Diederwinkel des ursprünglichen Polyeders gleich oft in die Summen einfließen. Dies gilt ebenfalls für $\sum_2^{'}$ und $\sum_2^{''}$. Man erhält also.

$$\sum\nolimits_1^{''} = \sum\nolimits_2^{''} \text{, sowie } \sum\nolimits_1^{'} = \sum\nolimits_1^{''} + l_1\pi \text{ und } \sum\nolimits_2^{'} = \sum\nolimits_2^{''} + l_2\pi$$

Dies kann man umstellen zu.

$$\sum\nolimits_2^{'} = \sum\nolimits_1^{'} + l\pi$$

Da bekannt ist, dass P und Q um kongruente Stücke ergänzt wurden, auf deren Kanten in den Zerlegungen die gleiche Zahl an Perlen liegt, kann man die Beiträge der kongruenten $P_1, \ldots, P_n$ und $Q_1, \ldots, Q_n$ auf beiden Seiten abziehen und übrig bleiben die Diederwinkel von P und Q, sowie der Summand $l\pi$ und die Bricardsche Bedingung ist auch für Ergänzungsgleichheit gezeigt.

3 Konstruktion der Lösung

Mithilfe der Bricardschen Bedingung kann man folgendes erkennen. Wenn für 2 Tetraeder die Gleichung

$$m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r \ = n_1\beta_1 + \cdots + n_s\beta_s + k\pi$$

nicht gilt, so können diese nicht ZG oder EG sein. Nun müssen nur 2 Tetraeder gleicher Grundfläche und Höhe gefunden werden, die diese Gleichung nicht erfüllen können. Für Tetraeder 1 werden 3 orthogonal aufeinander stehende, sich aber in einem Punkt

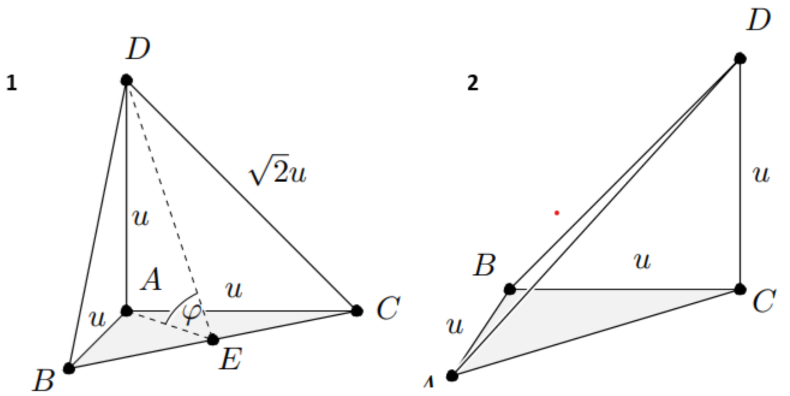

Abbildung 6: 2 Tetraeder, die das Problem lösen

berührende Geraden der Länge u genommen, für Tetraeder 2 nimmt man ebenfalls 3 orthogonale Geraden der Länge u, diese liegen aber nicht alle aneinander. Dass Grundfläche und Höhe beider Tetraeder übereinstimmen ist offensichtlich. Nun liegen in Tetraeder 2 die Diederwinkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} und \frac{\pi}{4}$ vor. In Tetraeder 1 gibt es die Diederwinkel $\frac{\pi}{2}$ zwischen den Boden und den beiden im Bild hinteren Seiten, sowie φ zwischen der im Bild vorderen Seite und den übrigen. Dieser kann mittels Pythagoras leicht berechnet werden und beträgt $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$. Um die Bricardsche Bedingung zu erfüllen, müsste es m_i, n_j geben mit

$$m_1 \frac{\pi}{2} + m_2 \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) = n_1 \frac{\pi}{2} + n_2 \frac{\pi}{3} + n_3 \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_2 \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})}{\pi} = \frac{(n_1 - m_1)}{2} + \frac{n_2}{3} + \frac{n_3}{4}$$

Da allerdings im Kapitel des Buches über einige Irrationale Zahlen bewiesen wurde, dass $\frac{\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})}{\pi}$ irrational ist und auf der rechten Seite der Gleichung nur rationale Zahlen stehen kann die Bricardsche Bedingung nicht erfüllt werden, ergo sind die beiden Tetraeder nicht ZG oder EG und Hilberts 3. Problem vollständig gelöst.

4 Literatur

M. Aigner, G. M. Ziegler, Das Buch der Beweise. SPringer, 5. Auflage (S. 75-83)