Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe am Fr 9.05, 10:30 Uhr (Üb.)
oder früher nach Vereinbarung

Coxetergruppen II
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $n \geqslant 2$.

1) Beweisen Sie, dass n die maximal mögliche Länge der Elemente aus D_n ist.

2) Beweisen Sie, dass D_n nur ein Element der Länge n hat.

3) Beweisen Sie, dass dieses Element genau zwei kürzeste Darstellungen hat.

Aufgabe 2. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

1) Seien $k, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und seien $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(c_1, c_2)B^k A^n = (c_3, c_4)$$

ist. Beweisen Sie: Ist $|c_1| < |c_2|$, dann ist $|c_2| < |c_3| < |c_4|$.

2) Leiten Sie aus 1) ab, dass die Gruppe $\langle A, B\rangle$ frei ist.

3) Sei

$$C = \begin{pmatrix} -23 & -86 \\ -4 & -15 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass $C \in \langle A, B\rangle$ ist.

4) Beweisen Sie:

$$\langle A, B\rangle = \{X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid X_{11} \equiv X_{22} \equiv 1 \pmod 4,\;\; X_{12} \equiv X_{21} \equiv 0 \pmod 2\}.$$

5) Leiten Sie daraus ab, dass $\langle A, B\rangle$ den Index 12 in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hat.

Hinweis.

1) Benutzen Sie die Ungleichung $|x + y| \geqslant |x| - |y|$.

2) Frei bedeutet: Es gilt $B^{k_1}A^{n_1} \dots B^{k_s}A^{n_s} \neq 1$ *für* $k_i, n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, s$, $s \in \mathbb{N}$.

Fortsetzung Seite 2.

Zum Information:

Sei $\varphi : G \to H$ ein Epimorphismus. Es wird beschrieben, wie man eine Präsentation von G aus Präsentationen von H und $\mathrm{Ker}(\varphi)$ bilden kann. Seien

$$\begin{array}{ll} H & = \langle h_1, \ldots, h_n \,|\, r_i(h_1, \ldots, h_n) = 1 \;\; (i \in I)\rangle, \\ \mathrm{Ker}(\varphi) & = \langle x_1, \ldots, x_m \,|\, s_j(x_1, \ldots, x_m) = 1 \;\; (j \in J)\rangle. \end{array}$$

Wir wählen $g_\ell \in G$, so dass $\varphi(g_\ell) = h_\ell$ ist, $\ell = 1, \ldots, n$. Merken wir an:

- Da $r_i(g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ ist, existieren Wörtern W_i, für die folgendes git:

$$r_i(g_1, \ldots, g_n) = W_i(x_1, \ldots, x_m).$$

- Da $g_\ell^{-1} x_t g_\ell \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ ist, existieren Wörtern $U_{\ell,t}$, für die folgendes git:

$$g_\ell^{-1} x_t g_\ell = U_{\ell,t}(x_1, \ldots, x_m).$$

Dann hat G die folgende Präsentation:

$$\begin{array}{ll} \langle x_1, \ldots, x_m, g_1, \ldots, g_n \,| & s_j(x_1, \ldots, x_m) = 1 \;\; (j \in J), \\ & r_i(g_1, \ldots, g_n) = W_i(x_1, \ldots, x_m) \;\; (i \in I), \\ & g_\ell^{-1} x_t g_\ell = U_{\ell,t}(x_1, \ldots, x_m) \;\; (\ell \in \{1, \ldots, n\}, t \in \{1, \ldots, m\})\rangle. \end{array}$$

Aufgabe 3.

1) Beweisen Sie, dass $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_2)| = 6$ ist.

2) Beweisen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_2) \cong D_3$ ist.

3) Wir betrachten den Epimorphismus $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_2)$, so dass φ die Zahlen in Matrizen aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch ihre Reste Modulo 2 ersetzt. Dann ist

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,|\, X_{11} \equiv X_{22} \equiv 1 \pmod 2, \;\; X_{12} \equiv X_{21} \equiv 0 \pmod 2\}.$$

Beweisen Sie mit Hilfe der Aufgabe 2.4), dass $\mathrm{Ker}(\varphi) = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$ ist, wobei

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist.

Ihre Lösungen der Teile 4)-6) dieser Aufgabe geben Sie bitte nicht am 9.05 ab, sondern am 23.05.

4) Geben Sie eine Präsentation von $\mathrm{Ker}(\varphi)$ mit den Erzeugern x_1, x_2, x_3.

5) Seien

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Präsentation von $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_2)$ in Erzeuger h_1, h_2, wobei $h_i = \varphi(g_i)$ ist.

6) Geben Sie eine Präsentation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Keine weitere Aufgabe.