Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe am Fr 6.06, 10:30 Uhr (Üb.)
.
oder früher nach Vereinbarung

Coxetergruppen II
Übungsblatt 4

Bitte lesen Sie Kapitel 6 des Skriptes im Netz.

Aufgabe 1.

1) Sei G eine topologische Gruppe. Beweisen Sie: Für jede Umgebung V von 1 existiert eine Umgebung U von 1, so dass $U \cdot U^{-1} \subseteq V$ ist.
2) Geben Sie ein Beispiel eines topologischen Raumes, in dem jede Folge von Elementen genau zwei Limes hat.

Aufgabe 2. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \theta: \quad & \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V^*) \\ & t \mapsto (f \mapsto f \circ t^{-1}). \end{aligned}$$

1) Beweisen Sie:

   a) θ ist ein Homomorphismus.
   b) θ is injektiv.
   c) θ ist surjektiv.

2) Sei A die Darstellungsmatrix von t in einer Basis $e_1, \dots, e_n$ von V. Beweisen Sie, dass $(A^{-1})^{\text{transp}}$ (die zu A invers-transponierte Matrix) die Darstellungsmatrix von $f \mapsto f \circ t^{-1}$ in der dualen Basis $e_1^*, \dots, e_n^*$ von V^* ist.

Aufgabe 3. Sei $W = \langle s_1, s_2 \,|\, s_1^2 = s_2^2 = 1 \rangle$. Wir betrachten den kontragradienten Homomorphismus $\sigma^* : W \to \mathrm{GL}(V^*)$ (siehe Aufgabe 2 aus dem Übungsblatt 3).

1) Ist σ^* irreduzibel?
2) Ist σ^* vollständig reduzibel?
3) Mit Hilfe des Satzes 6.4.2 aus dem Skript im Netz beweisen Sie, dass $|D_\infty| = \infty$ ist.

Aufgabe 4. Geben Sie einen direkten Beweis, dass die mit der Coxeter-Gruppe

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}) = \langle s_1, s_2, s_3 \,|\, s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1, (s_1 s_3)^2 = 1, (s_1 s_2)^3 = 1 \rangle.$$

assoziierte Bilinearform B nicht positiv definit ist.

Keine weitere Aufgaben.