Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe am Fr 20.06, 10:30 Uhr (Üb.)
oder früher nach Vereinbarung

Coxetergruppen II
Übungsblatt 5

Bitte lesen Sie Kapitel 6 des Skripts im Netz.

Aufgabe 1. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

1) Sei β eine nichtsingulare (d.h. Rad $= \{0\}$) symmetrische Bilinearform auf V. Für jedes $v \in V$ definieren wir ein Funktional

$$\begin{aligned}\beta_v : \ & V \to V,\\ & x \mapsto \beta(v, x).\end{aligned}$$

Beweisen Sie:

(a) $V^* = \{\beta_v \,|\, v \in V\}$.

(b) Die folgende Abbildung ist ein Isomorphismus:

$$\begin{aligned}\varphi_\beta : \ & V \to V^*,\\ & v \mapsto \beta_v.\end{aligned}$$

(c) Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Gruppendarstellung. Seien β und β' zwei G-invariante nichsingulare symmetrische Bilinearformen auf V. Dann ist die Abbildung

$$\theta = (\varphi_\beta)^{-1} \circ \varphi_{\beta'} : V \to V$$

ein Isomorphismus, der mit allen Elementen aus $\rho(G)$ kommutiert.

2) Sei $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Gruppendarstellung. Nehmen wir an, dass die einzigen Endomorphismen von V, die mit allen Elementen von $\rho(G)$ kommutieren, sind Skalarendomorphismen. Dann gilt: je zwei G-invariante symmetrische nichtsingulare Bilinearformen β und β' auf V unterscheiden sich nur um einen Faktor aus $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Sei (W, S) ein Coxeterpaar mit $|S| = n$. Wir betrachen die kanonische Darstellung $\sigma : W \to \mathrm{GL}(V)$ mit $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbb{R}$. Beweisen Sie:

a) Ist die Gruppe W kristallographisch, dann ist jede parabolische Untergruppe $W_T := \langle T \rangle \ \ (T \subseteq S)$ auch krisrallographisch.

b) Ist $\mathrm{Spur}(\sigma(w)) \in \mathbb{Z}$ für alle $w \in W$, dann ist W kristallographisch.

Aufgabe 3. Sei (W, S) ein Coxeterpaar mit $|S| = n$. Wir betrachen die kanonische Darstellung $\sigma : W \to \mathrm{GL}(V)$ mit $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbb{R}$. Angenommen, dass reelle Zahlen c_i existieren, die die folgende Bedingung für $i \neq j$ erfüllen:

$$\begin{aligned}
m(i,j) = 3 \quad & \Rightarrow c_i = c_j,\\
m(i,j) = 4 \quad & \Rightarrow c_i = \sqrt{2}c_j \ \text{ oder } \ c_j = \sqrt{2}c_i,\\
m(i,j) = 6 \quad & \Rightarrow c_i = \sqrt{3}c_j \ \text{ oder } \ c_j = \sqrt{3}c_i,\\
m(i,j) = \infty \quad & \Rightarrow c_i = c_j.
\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass das Gitter $L = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\mathbb{Z}$ W-invariant ist.

Keine weiteren Aufgaben.