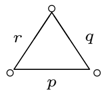
Lösungen
zur Hauptklausur Coxetergruppen II, SoSe 14 (11.07.14)

(Prof. O. Bogopolski)

Sei

$$G_{p,q,r} = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1,\ (s_1 s_2)^p = (s_2 s_3)^q = (s_3 s_1)^r = 1 \rangle.$$



Aufgabe 1.

1) Sei (G, S) ein Coxeter-Paar. Geben Sie die Definition des Monomorphismus $\sigma : G \to \mathrm{GL}(V)$ aus der Vorlesung. [1 P.]

2) Formulieren Sie ein Kriterium für die Endlichkeit einer Coxeter-Gruppe. [2 P.]

3) Beweisen Sie, dass die Coxeter-Gruppe $G_{4,4,2}$ unendlich ist. [3 P.]

4) Formulieren Sie ein Kriterium für eine kristallographische Coxeter-Gruppe. [2 P.]

5) Finden Sie ein invariantes Gitter $L = \beta_1\mathbb{Z} + \beta_2\mathbb{Z} + \beta_3\mathbb{Z}$ in $V = \mathrm{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ für die kristallographische Coxeter-Gruppe $G_{4,4,\infty}$. [3 P.]

6) Zerlegen Sie $\sigma(s_3 s_2)(\beta_1)$ durch die Basis $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. [4 P.]

Lösung.
1) Der Monomorphismus σ wird auf Erzeuger $s \in S$ folgendermaßen definiert:

$$\sigma(s)(v) = v - 2B(v, \alpha_s)\alpha_s \quad (v \in V).$$

2) *Satz 6.4.2.* Eine Coxeter-Gruppe W ist genau dann endlich, wenn die assoziierte Bilinearform B positiv definit ist.

3) Es gilt

$$\begin{aligned} B(\alpha_1, \alpha_2) &= -\cos(\tfrac{\pi}{4}) &&= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ B(\alpha_2, \alpha_3) &= -\cos(\tfrac{\pi}{4}) &&= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ B(\alpha_1, \alpha_3) &= -\cos(\tfrac{\pi}{2}) &&= 0. \end{aligned}$$

Die assoziierte Matrix ist

$$M(B) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Da $\det(M(B)) = 0$ ist, ist sie nicht positiv definit. Deswegen ist die Gruppe $G_{4,4,2}$ unendlich.

4)

> *Satz 6.5.4.* Eine Coxeter-Gruppe W ist kristallographisch genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
>
> 1) Es gilt $m_{i,j} \in \{2, 3, 4, 6, \infty\}$ für alle $i \neq j$.
> 2) In jedem Kreis von $\Gamma(W, S)$ ist die Anzahl von Kanten mit $m_{i,j} = 4$ und mit $m_{i,j} = 6$ gerade.

5) Wie im Beweis des Satzes 6.5.4 nehmen wir $\beta_1 := \alpha_1$, $\beta_2 := \sqrt{2}\alpha_2$, $\beta_3 := \alpha_3$.

6) Wir haben

$$\begin{aligned} B(\alpha_1, \alpha_2) &= -\cos(\tfrac{\pi}{4}) &&= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ B(\alpha_2, \alpha_3) &= -\cos(\tfrac{\pi}{4}) &&= -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ B(\alpha_1, \alpha_3) &= -\cos(\tfrac{\pi}{\infty}) &&= -1. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formel und 5) berechnen wir konsequent:

$$\begin{aligned} \sigma(s_2)(\beta_1) &= \beta_1 - 2B(\alpha_2, \beta_1)\alpha_2 \\ &= \beta_1 - 2B(\alpha_2, \alpha_1)\alpha_2 \\ &= \beta_1 + 2\tfrac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2 \\ &= \beta_1 + \beta_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(s_3 s_2)(\beta_1) &= \sigma(s_3)(\beta_1 + \beta_2) \\ &= \beta_1 + \beta_2 - 2B(\alpha_3, \beta_1 + \beta_2)\alpha_3 \\ &= \beta_1 + \beta_2 - 2B(\alpha_3, \alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2)\alpha_3 \\ &= \beta_1 + \beta_2 - 2(-1 - \sqrt{2}\tfrac{\sqrt{2}}{2})\alpha_3 \\ &= \beta_1 + \beta_2 + 4\beta_3. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie: Für $p, q, r \geqslant 3$ ist $G_{p,q,r}$ hyperbolisch genau dann, wenn folgendes gilt:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

[15 P.]

Lösung. Für $p, q, r \geqslant 3$ ist das Coxeter-Paar $(G_{p,q,r}, \{s_1, s_2, s_3\})$ irreduzibel.
Zur Erinnerung:

> *Satz 6.8.5.* Ein irreduzibles Coxeter-Paar (W, S) ist hyperbolisch genau dann, wenn folgendes gilt:
>
> 1) Die assoziierte Bilinearform B ist nicht singular und nicht positiv definit.
> 2) Für jedes $s \in S$ gilt $B_{S \setminus \{s\}} \succcurlyeq 0$,
>   wobei $B_{S \setminus \{s\}}$ die mit $(W_{S \setminus \{s\}}, S \setminus \{s\})$ assoziierte Bilinearform ist.

Wir haben

$$\begin{aligned} B(\alpha_1, \alpha_2) &= -\cos(\tfrac{\pi}{p}), \\ B(\alpha_2, \alpha_3) &= -\cos(\tfrac{\pi}{q}), \\ B(\alpha_1, \alpha_3) &= -\cos(\tfrac{\pi}{r}). \end{aligned}$$

Deswegen gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\frac{\pi}{p}) & -\cos(\frac{\pi}{r}) \\ -\cos(\frac{\pi}{p}) & 1 & -\cos(\frac{\pi}{q}) \\ -\cos(\frac{\pi}{r}) & -\cos(\frac{\pi}{q}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $p, q, r \geqslant 3$ ist und mindestens eines von p, q, r größer ist als 3, gilt:

$$\begin{aligned} \det(B) &= 1 - 2\cos(\tfrac{\pi}{p})\cos(\tfrac{\pi}{q})\cos(\tfrac{\pi}{r}) - \cos^2(\tfrac{\pi}{p}) - \cos^2(\tfrac{\pi}{q}) - \cos^2(\tfrac{\pi}{r}) \\ &< 1 - 2\cos(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{3}) - \cos^2(\tfrac{\pi}{3}) - \cos^2(\tfrac{\pi}{3}) - \cos^2(\tfrac{\pi}{3}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist die Bedingung 1) des Satzes 6.8.5 erfüllt. Die Bedingung 2) ist auch erfüllt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\frac{\pi}{p}) \\ -\cos(\frac{\pi}{p}) & 1 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\frac{\pi}{q}) \\ -\cos(\frac{\pi}{q}) & 1 \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\frac{\pi}{r}) \\ -\cos(\frac{\pi}{r}) & 1 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Aufgabe 3. Wir wissen, dass die Coxeter-Gruppe

$$\mathbf{A}_3 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^2 = 1 \rangle \qquad \circ \overset{3}{—} \circ \overset{3}{—} \circ$$

isomorph S_4 ist. Jetzt betrachten wir die Coxeter-Gruppe

$$\mathbf{B}_3 = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = 1, (xy)^3 = (yz)^4 = (xz)^2 = 1 \rangle \qquad \circ \overset{3}{—} \circ \overset{4}{—} \circ$$

Diese Gruppe ist auch endlich. Nach der Witt-Formel gilt $|\mathbf{B}_3| = 48$.
Wir betrachten die Untergruppe $H := \langle x, y, t \rangle$ von $\mathbf{B}_3$, wobei $t = zyz$ ist. Beweisen Sie:

1) $H \lhd \mathbf{B}_3$; [4 P.]
2) $\mathbf{B}_3/H \cong \mathbb{Z}_2$; [4 P.]
3) $H \cong \mathbf{A}_3$; [5 P.]
4) $\mathbf{B}_3 \cong S_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$. [2 P.]

Lösung.

1) Wir konjugieren die Erzeuger x, y, t von H mit den Erzeugern x, y, z von $\mathbf{B}_3$ und überprüfen, dass das Resultat in H liegt. Es genügt, x, y, t mit z zu konjugieren:

$$\begin{aligned} z^{-1}xz &= x \quad (\text{wegen } z^2 = 1 \text{ und } (xz)^2 = 1), \\ z^{-1}yz &= t \quad (\text{wegen } z^2 = 1 \text{ und der Definition von } t), \\ z^{-1}tz &= y \quad (\text{wegen } z^2 = 1 \text{ und der Definition von } t) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_3/H &\cong \langle x, y, z \,|\, x^2 = y^2 = z^2 = 1, (xy)^3 = (yz)^4 = (xz)^2 = 1\rangle / \langle x, y, zyz\rangle \\ &\cong \langle x, y, z \,|\, x^2 = y^2 = z^2 = 1, (xy)^3 = (yz)^4 = (xz)^2 = 1, x = 1, y = 1, zyz = 1\rangle \\ &\cong \langle z \,|\, z^2 = 1\rangle \\ &\cong \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

3) Betrachte den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{A}_3 &\to H, \\ a &\mapsto y, \\ b &\mapsto x, \\ c &\mapsto t. \end{aligned}$$

Das ist ein Homomorphismus, da die Relationen in $\mathbf{A}_3$ in die Relationen von H abgebildet werden. Z.B.

$$(bc)^3 \mapsto (xt)^3 = (xzyz)^3 = (z^{-1}xyz)^3 = z^{-1}(xy)^3 z = 1.$$

Merken wir noch folgendes an:
- ϕ ist ein Epimorphismus.
- $|\mathbf{A}_3| = 24.$ (da $\mathbf{A}_3 \cong S_4$ nach der Aufgabenstellung ist)
- $|H| = \frac{|\mathbf{B}_3|}{2} = \frac{48}{2} = 24.$ (siehe Punkt 2) und die Aufgabenstellung)

Daraus folgt $H \cong \mathbf{A}_3$.

4) Wir haben:
- $\mathbf{B}_3 = \langle H, z\rangle$
- $H \lhd \mathbf{B}_3$
- $H \cap \langle z\rangle = 1$ (sonst $z \in H$ und dann $H = \langle x, y, t, z\rangle = \mathbf{B}_3$, ein Widerspruch zu 2))

Also gilt $\mathbf{B}_3 \cong H \rtimes \langle z\rangle \cong \mathbf{A}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong S_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 4. Es ist bekannt, dass $G_{5,5,\infty} \cong F_4 \rtimes D_5$ ist (F_4 ist die freie Gruppe des Ranges 4). Nur mit dieser Information (und ohne Tabelle der affinen Coxeter-Gruppen) beweisen Sie, dass $G_{5,5,\infty}$ keine affine Coxeter-Gruppe ist. [15 P.]

Lösung. Nehmen wir an, dass $G := G_{5,5,\infty}$ eine affine Coxeter-Gruppe ist. Dann gilt $G \cong A \rtimes W$, wobei $A \cong \mathbb{Z}^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und W eine endliche Coxeter-Gruppe ist.

Also ist $F_4 \rtimes D_5 \cong G \cong A \rtimes W$. O.B.d.A. gilt $F_4 \rtimes D_5 = G = A \rtimes W$. Dann haben F_4 und A endliche Indizes in G. Deswegen hat $F_4 \cap A$ einen endlichen Index in G. Insbesondere existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $g \in G$ gilt: $g^n \in F_4 \cap A$. Seien x, y, z, t freie Erzeuger von F_4. Dann gilt $x^n, y^n \in F_4 \cap A \leqslant A \cong \mathbb{Z}^n$. Daraus folgt $[x^n, y^n] = 1$. Ein Widerspruch.