Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun

Heinrich-Heine Universität Düsseldorf

4. November 2009

Bayessche Formel

- ▶ Version der Formel für ein Ereignis und sein Komplementärereignis:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot (1 - P(B))}.$$

- ▶ allgemeine Version:

Hierbei $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$, wobei $B_j \cap B_k = \emptyset$ für alle Wahlen von verschiedenen j und k , d. h. die $B_1, \dots, B_n$ bilden eine Zerlegung von Ω . Dann

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

Beispiel: Schnecken

Zwei Schneckenarten S_1 und S_2 sollen von angelernten Kräften unterschieden werden. Diese Helfer machen Fehler:

- ▶ 20% der Schnecken der ersten Art werden fälschlich der zweiten Art zugeordnet
- ▶ 5% der Schnecken der zweiten Art werden fälschlich der ersten Art zugeordnet

70% der Schneckenpopulation gehört der ersten Art an
Ein Helfer hat eine Schnecke als der ersten Art zugehörig eingeordnet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er recht?

Formalisierung

- ▶ B und B^c sind die Hypothesen der bedingten Wahrscheinlichkeit aus der Aufgabenstellung, also
- ▶ $B =$ "Schnecke gehört zur ersten Art"
- ▶ $B^c =$ "Schnecke gehört zur zweiten Art"
- ▶ A ist das Ereignis, dessen bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben ist
- ▶ $A =$ "Schnecke wird erster Art zugeordnet"
- ▶ $A^c =$ "Schnecke wird zweiter Art zugeordnet"

Bekannt sind folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A|B) = 0.80 \quad P(A|B^c) = 0.05 \quad P(B) = 0.70$$

gesucht ist $P(B|A)$

Anwendung der Bayesschen Formel

$$P(B|A) = \frac{0.8 \cdot 0.7}{0.8 \cdot 0.7 + 0.05 \cdot (1 - 0.7)} = 0.9739$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schnecke, die als zur ersten Art gehörig klassifiziert wurde, tatsächlich zur ersten Art gehört, liegt über 97%

$$P(B^c|A^c) = \frac{0.95 \cdot 0.3}{0.95 \cdot 0.3 + 0.20 \cdot (1 - 0.3)} = 0.6706$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schnecke, die als zur zweiten Art gehörig klassifiziert wurde, tatsächlich zur zweiten Art gehört, beträgt 67%

Stochastische Unabhängigkeit

- ▶ Zwei Ereignisse A und B heißen (*stochastisch*) *unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- ▶ Das bedeutet

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{und} \quad P(B|A) = P(B)$$

oder in Worten: Kenntnis über das Eintreffen von A liefert keine Zusatzinformation über B und umgekehrt

Beispiel für unabhängige Ereignisse

Zweifacher Wurf eines fairen Würfels

$A =$ "Erster Wurf eine 3"

$B =$ "Pasch"

$A \cap B =$ "Dreierpasch"

Folgende Wahrscheinlichkeiten

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Also sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig.

Beispiel für abhängige Ereignisse

Zweifacher Wurf eines fairen Würfels

$A =$ "Erster Wurf eine 3"

$B =$ "Augensumme 8" = $\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), 6, 2)\}$

$A \cap B = \{(3, 5)\}$

Folgende Wahrscheinlichkeiten

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{5}{36} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Aber

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = 0.02315 \neq 0.02778 = \frac{1}{36}$$

Also sind die beiden Ereignisse stochastisch abhängig.

Unabhängigkeit in konkreten Experimenten

In konkreten Experimenten wird die Unabhängigkeit durch den Versuchsaufbau gewährleistet

Abschnitt 2.4

Binomialverteilungen

Binomialverteilung

Ein Ja/Nein-Experiment wird n -mal wiederholt. Die Erfolgswahrscheinlichkeit für das einzelne Experiment sei p . Die einzelnen Experimente seien unabhängig.

Mit

$$B_{n,p}(k)$$

bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit von genau k Erfolgen.

$B_{n,p}$ heißt *Binomialverteilung* mit n *Freiheitsgraden* zum *Parameter* p .

Auf den nächsten Folien werde ich die konkrete Formel für $B_{n,p}(k)$ entwickeln.

Fakultät, Beispiel

- ▶ In der Lottotrommel sind 49 Kugeln. **Alle** Kugeln werden gezogen, die Reihenfolge wird notiert. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
- ▶ Es gibt 49 Möglichkeiten für die erste Kugel, 48 für die zweite, 47 für die dritte, ..., 2 für die 48-te (also die vorletzte), und 1 für die letzte
- ▶ Anzahl der Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} & 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ & = 608281864034267560872252163321295376887552831379210240000000000 \\ & \qquad \qquad \qquad = 6.083 \cdot 10^{62} \end{aligned}$$

- ▶ Diese Zahl schreibt man 49!

Fakultät

- ▶ Die Zahl

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

bezeichnet man als *Fakultät* von n

- ▶ Sie gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, n verschiedene Objekte anzuordnen
- ▶ Jede solche Anordnung bezeichnet man als *Permutation*
- ▶ Beispiele

$$1! = 1 \quad 2! = 2 \quad 3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120$$

- ▶ Außerdem definiert man $0! = 1$

Ziehen ohne Zurücklegen

- ▶ Aus der Lottotrommel werden 6 Kugeln gezogen
- ▶ Anzahl der Möglichkeiten **unter** Beachtung der Reihenfolge

$$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 1\,478\,412\,928$$

- ▶ Anzahl der Möglichkeiten **ohne** Beachtung der Reihenfolge

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816$$

- ▶ Diese Zahl ist gleich

$$\frac{49!}{6! \cdot 43!}$$

- ▶ Sie heißt “49 über 6” und man schreibt sie $\binom{49}{6}$