

Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun

Heinrich-Heine Universität Düsseldorf

13. Oktober 2010

Hinweise

- Internetseite zur Vorlesung:
<http://blog.ruediger-braun.net>
Dort können Sie Materialien und Übungsblätter herunterladen.
- Termine der Vorlesung:
 - Mi, 11:15–13:00 in 5D
 - Do, 11:15–12:00 in 5D

Übungen

- Termin der Übungen:
 - Do, 12:15–13:00 in 5D
- Übungsblätter: Ausgabe Donnerstags, Abgabe am darauf folgenden Donnerstag um 11:00 Uhr in einen der Übungsbriefkästen
- Die Lösungen werden bewertet
- **Um zur Klausur zugelassen zu werden, benötigen Sie 30% der Übungspunkte.**
Das gilt nicht für Wiederholungsprüfungen

Klausurtermine

- Das Prüfungsamt hat die **Klausurtermine** veröffentlicht. Für "Mathematik für Biologen" sind dies
 - 10.02.2011, 14:30–16:30
 - 25.03.2011, 10:15–12:15
 - 2. Nachklausur in den Sommerferien
- Klausurhilfsmittel
 - Vier beidseitig handbeschriebene A4-Blätter
 - Taschenrechner

Literaturempfehlungen

- Rudolf, Kuhlisch: *Biostatistik*
- Timischl: *Biostatistik*
- Köhler, Schachtel, Voleske: *Biostatistik* (gibt es auch elektronisch unter <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-37712-2>)
- Henze: *Stochastik für Einsteiger* (mathematischer als die anderen Titel)

Alle diese Werke enthalten weit mehr Stoff als die Vorlesung.

Aufbau der Vorlesung

- Exponentialfunktion und Logarithmen
- Deskriptive Statistik
- Stochastik
- Differential- und Integralrechnung
- Schließende Statistik

Teil I

Exponentialfunktion und Logarithmen

- 1 Potenzgesetze
- 2 Exponentialfunktion
- 3 Logarithmus
- 4 Wachstums- und Abklingprozesse
 - Halbwertszeit
 - Verdopplungszeit
 - Beispiel: Absorption

Potenzfunktion

- Die Funktion $f(x) = a^x$ heißt *Potenzfunktion*.
- a bezeichnet man als *Basis* und x als *Exponenten*.
- Rechenregeln:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Beispiele zu den Rechenregeln

$$\begin{aligned} 2^{3+4} &= 2^7 = 128 \\ &= \\ 2^3 \cdot 2^4 &= 8 \cdot 16 = 128 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 \cdot 3)^4 &= 6^4 = 1296 \\ &= \\ 2^4 \cdot 3^4 &= 16 \cdot 81 = 1296 \end{aligned}$$

Verzinsung

- die Bank zahlt 3% Zinsen
- aus 1€ wird nach einem Jahr $(1 + p)$ €, wobei $p = 0.03$
- nach zwei Jahren hat man $(1 + p)^2$ €, nach dreien $(1 + p)^3$ €, usw.

Jahre	Kapital
0	1000.00€
1	1030.00€
2	1060.90€
3	1092.73€
4	1125.51€
5	1158.27€
6	1194.05€

Verzinsung

- einige Banken verzinsen monatlich mit einem zwölftel der Jahreszinssumme
- bei so einer Bank beträgt der Wert nach einem Jahr

$$\left(1 + \frac{p}{12}\right)^{12} \text{ €}$$

- Bei 3% Verzinsung werden so aus 1000.00€ in einem Jahr 1030.42€

kontinuierliche Verzinsung und Eulersche Zahl

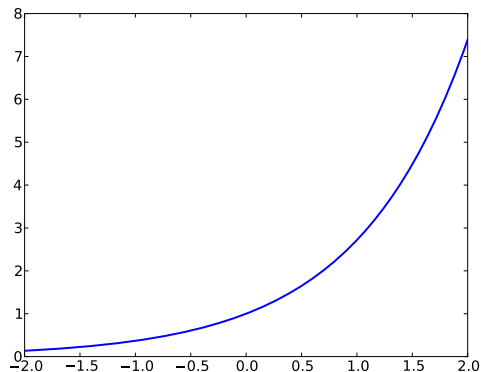
- Startkapital 1000.00€
- bei 3% erhält man 1030.00€ bei jährlicher Verzinsung
verglichen mit 1030.42€ bei monatlicher Verzinsung
- bei 100% Jahreszinsen erhält man 2000.00€ bei jährlicher
Verzinsung und 2613.00€ bei monatlicher Verzinsung
- man könnte auch täglich verzinsen, dann erhält man
2714.60€ bei 100% Jahreszinsen
- oder stündlich, dann erhält man 2718.13€
- Die **Eulersche** Zahl ist der Grenzwert dieses Prozesses

$$e = 2.7182818284590451 \dots$$

- Die Exponentialfunktion zur Basis e wird mit $\exp$ bezeichnet

$$\exp(x) = e^x$$

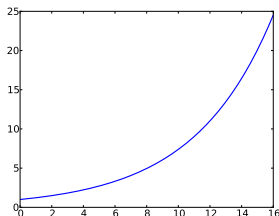
Graph der Exponentialfunktion



Wachstums- und Abklingprozesse

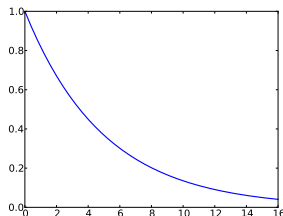
A ein positiver Parameter

$f(x) = e^{A \cdot x}$ beschreibt
Wachstumsprozess



Graph von $f(x) = e^{0.2 \cdot x}$

$f(x) = e^{-A \cdot x}$ beschreibt
Abklingprozess



Graph von $f(x) = e^{-0.2 \cdot x}$

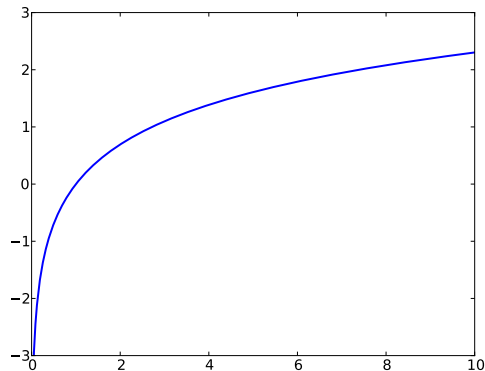
Natürlicher Logarithmus

- Die Exponentialfunktion besitzt eine Umkehrfunktion, genannt *natürlicher Logarithmus* und geschrieben $\ln(y)$
- es gelten

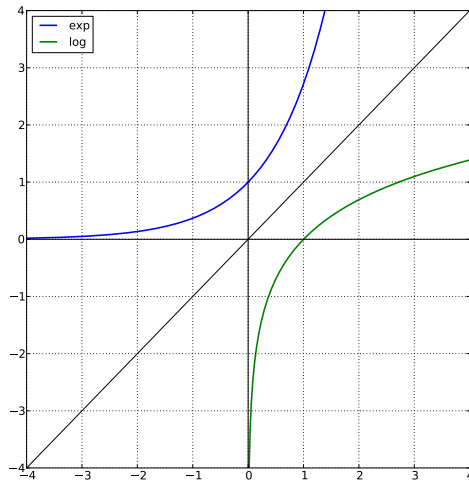
$$\exp(\ln(y)) = y \quad \text{und} \quad \ln(\exp(x)) = x$$

- der Logarithmus ist nur für positive Argumente definiert

Graph des natürlichen Logarithmus



Graphen von Exponentialfunktion und Logarithmus



Rechenregeln

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$(e^y)^x = e^{y \cdot x}$$

$$e^0 = 1$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

$$\ln(1) = 0$$

Umrechnungen

- Der Zehnerlogarithmus wird mit $\lg x$ bezeichnet; auf Taschenrechnern häufig mit $\log x$.



$$10^{\lg x} = x \quad \text{und} \quad \lg(10^y) = y$$

Berechnung von $\lg e$

- $y = \lg e$ bedeutet

$$10^y = e$$

- Wende den natürlichen Logarithmus auf beide Seiten der Gleichung an

$$\ln(10^y) = \ln e$$

- Rechenregeln: $\ln(a^y) = y \cdot \ln(a)$ und $\ln e = 1$

$$y \cdot \ln(10) = 1$$

-

$$\lg(e) = y = \frac{1}{\ln(10)} = 0.4343$$

Wachstums- und Abklingprozesse

- Bei einem exponentiellen Wachstumsprozess sind die **prozentualen** Zuwächse pro (Zeit-)Einheit konstant.
- Bei einem exponentiellen Abklingprozess sind die **prozentualen** Verluste pro (Zeit-)Einheit konstant.
- Beispiel: Eine Bakterienkonzentration nehme pro Stunde um 15% ab. Man startet mit 10 000 Bakterien pro mm^2 :

Zeit [h]	0	1	2	3
Konzentration [mm^{-1}]	10 000	8 500	7 225	6 141
Zeit [h]	4	5	6	7
Konzentration [mm^{-1}]	5 220	4 437	3 771	3 206

Halbwertszeit

- Abklingprozesse besitzen eine *Halbwertszeit*. Das ist derjenige Zeitraum, in dem sich die verbleibende Menge jeweils halbiert.
- Zur Bestimmung der Halbwertszeit benötigt man den Logarithmus.

Beispiel zur Halbwertszeit

- Die Bakterienkonzentration $k(x)$ schrumpft in einer Stunde um 15%.
- Abklingprozess

$$k(x) = e^{-A \cdot x}$$

- $k(0) = 1$ (Normierung auf die Ausgangskonzentration)
- Bestimme zuerst A :

$$k(1) = 0.85 = e^{-A \cdot 1}$$

- Logarithmiere (beachte $\ln(e^y) = y$)

$$\ln(0.85) = -A$$

- Also $A = -\ln(0.85) = 0.1625$
- Die Konzentration folgt also der Formel $k(x) = e^{-0.1625 \cdot x}$

Beispiel zur Halbwertszeit, Fortsetzung

- Konzentration $k(x) = e^{-0.1625 \cdot x}$
- Die Halbwertszeit ist derjenige Wert x_{hw} mit $k(x_{hw}) = 0.5$
- Löse die Gleichung

$$e^{-0.1625 \cdot x_{hw}} = 0.5$$

- Das geschieht wieder durch Logarithmieren

$$-0.1625 \cdot x_{hw} = \ln(0.5) = -0.6931$$

- Also

$$x_{hw} = \frac{-0.6931}{-0.1625} = 4.266$$

- Alle 4.266 Stunden halbiert sich die Konzentration. [► Tabelle](#)

Verdopplungszeit

- Wachstumsprozesse besitzen eine *Verdopplungszeit*. Das ist derjenige Zeitraum, in dem sich die Menge jeweils verdoppelt.
- Beispiel: Eine Seerose verfünffacht ihre Fläche in einer Woche. Was ist ihre Verdopplungszeit?
- Wachstumsprozess (x in Tagen)

$$k(x) = e^{A \cdot x}$$

- Bestimme zuerst A :

$$k(7) = 5 = e^{A \cdot 7}$$

- Logarithmiere

$$\ln(5) = A \cdot 7$$

- Also $A = \frac{\ln(5)}{7} = 0.2299$
- Die Fläche folgt also der Formel $k(x) = e^{0.2299 \cdot x}$

Beispiel Seerose, Fortsetzung

- Fläche $k(x) = e^{0.2299 \cdot x}$
- Die Verdopplungszeit ist derjenige Wert x_d mit $k(x_d) = 2$
- Löse die Gleichung

$$e^{0.2299 \cdot x_d} = 2$$

- Das geschieht wieder durch Logarithmieren

$$0.2299 \cdot x_d = \ln(2) = 0.6931$$

- Also

$$x_d = \frac{0.6931}{0.2299} = 3.015$$

- Alle 3 Tage verdoppelt sich die Fläche.

Beispiel: Absorption



Photo Credit: Jerry Reid, U.S. Fish and Wildlife Service

Halbwertstiefe von blauem Licht

- In $140m$ Tiefe nimmt die Intensität von blauem Licht auf 1% ab.
- Bestimme A für die Intensitätsfunktion $k(x) = e^{-A \cdot x}$
- Gleichung

$$e^{-A \cdot 140} = 0.01$$

- Logarithmieren

$$-A \cdot 140 = \ln(0.01) = -4.605$$

- Also

$$A = \frac{4.605}{140} = 0.03289$$

Halbwertstiefe von blauem Licht, Fortsetzung

- Die Intensitätsfunktion für blaues Licht ist $e^{-0.03289 \cdot x}$, wenn x die Wassertiefe bezeichnet.
- Gleichung für die Halbwertstiefe x_{hw}

$$e^{-0.03289 \cdot x_{\text{hw}}} = 0.5$$

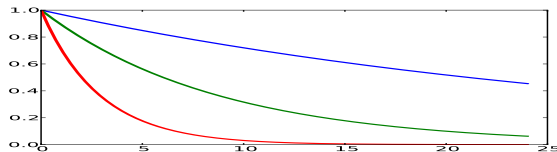
- Also

$$x_{\text{hw}} = -\frac{\ln(0.5)}{0.03289} = 21.07$$

- Die Halbwertstiefe für blaues Licht beträgt $21m$.
- Taucht man $21m$ tiefer, halbiert sich die Intensität des blauen Lichts.

Erklärung des Blaustichs

- Die Halbwertstiefe von rotem Licht beträgt $2m$, die von grünem Licht ungefähr $6m$.
- In $24m$ Tiefe hat sich die Intensität des roten Lichts schon 12mal halbiert, die Intensität ist also nur ein 4000-tel der Intensität an der Oberfläche.
- Dagegen beträgt die Intensität des blauen Lichts in $24m$ Tiefe ungefähr 50%.



Wasserfarbe nach Tiefe

