Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

27. Oktober 2010

Teil III

Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeiten I

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass hier im Hörsaal gleich viele männliche und weibliche Studierende sitzen?

Antwort: Das ist keine gute Frage.

Wahrscheinlichkeiten II

- Aus allen Studierenden der Mathematik werden zufällig vier ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zwei weiblich und zwei männlich?
- Die Mathematik hat ein ausgeglichenes Geschlechterverhältnis.
- Es gibt die folgenden 16 Möglichkeiten:

(m,m,m,m)	(m,m,m,w)	(m,m,w,m)	**(m,m,w,w)**
(m,w,m,m)	**(m,w,m,w)**	**(m,w,w,m)**	(m,w,w,w)
(w,m,m,m)	**(w,m,m,w)**	**(w,m,w,m)**	(w,m,w,w)
(w,w,m,m)	(w,w,m,w)	(w,w,w,m)	(w,w,w,w)

- 6 der 16 gleichwahrscheinlichen Versuchsausgängen gehören zur gesuchten Gruppe.
- Also ist die Wahrscheinlichkeit gleich $6/16 = 0.375$

Der Ereignisraum

- Alle potenziell auftretenden Ergebnisse bilden den *Ereignisraum.*
- Seine Elemente sind die *Elementarereignisse.*
- Der Ereignisraum wird gerne mit Ω bezeichnet und die Elementarereignisse mit ω.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

Beispiele für Ereignisräume

- Geschlechter von vier Studierenden

$$\begin{aligned}\Omega = \big\{&(m,m,m,m),(m,m,m,w),(m,m,w,m),(m,m,w,w),\\ &(m,w,m,m),(m,w,m,w),(m,w,w,m),(m,w,w,w),\\ &(w,m,m,m),(w,m,m,w),(w,m,w,m),(w,m,w,w),\\ &(w,w,m,m),(w,w,m,w),(w,w,w,m),(w,w,w,w)\big\}\end{aligned}$$

- Einfacher Wurf einer Münze

$$\Omega = \{A, Z\}$$

- Einfacher Wurf eines Würfels

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ereignisse

- Ein Ereignis besteht aus Elementarereignissen.
- Den Ereignisraum Ω bezeichnet man als *sicheres Ereignis.*
- Das leere Ereignis $\emptyset$ bezeichnet man als *unmögliches Ereignis.*

Beispiele für Ereignisse

- Im Beispiel "Geschlechter von vier Studierenden" war das interessierende Ereignis

$$\begin{aligned} A &= \text{"2 sind weiblich"} \\ &= \{(m,m,w,w),(m,w,m,w),(m,w,w,m), \\ &\quad (w,m,m,w),(w,m,w,m),(w,w,m,m)\} \end{aligned}$$

- Im Würfelbeispiel interessiert

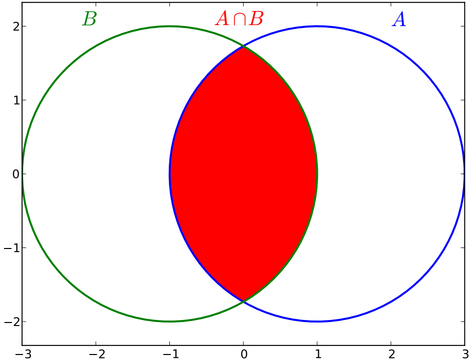
$$\begin{aligned} A &= \text{"gerade Zahl"} \\ &= \{2,4,6\} \end{aligned}$$

Konstruktionen

Aus einfachen Ereignissen werden komplexere aufgebaut.

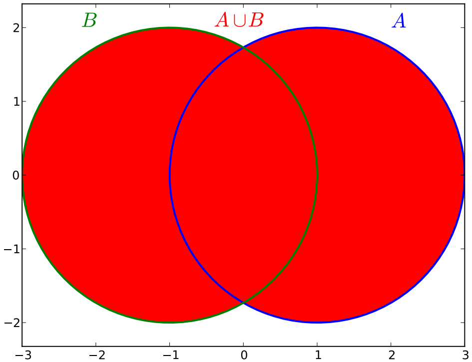
- Durchschnitt
- Vereinigung
- Differenz
- Komplement
- Produkt

Durchschnitt zweier Ereignisse



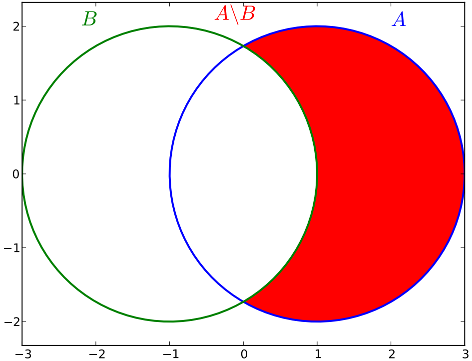
Der Durchschnitt $A \cap B$ zweier Ereignisse A und B besteht aus allen Elementarereignissen, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

Vereinigung zweier Ereignisse



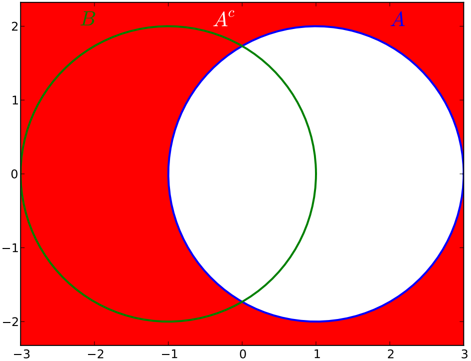
Die Vereinigung $A \cup B$ zweier Ereignisse A und B besteht aus allen Elementarereignissen, die zu mindestens einem der beiden Ereignisse gehören.

Differenz zweier Ereignisse



Die Differenz $A \setminus B$ zweier Ereignisse A und B besteht aus allen Elementarereignissen, die zu A, aber nicht zu B gehören.

Komplement



Das Komplement A^c eines Ereignisses A besteht aus allen Elementarereignissen, die nicht zu A gehören.

Mengensprechweise

Die Menge aller Elementarereignisse ist der Ereignisraum. Seine Teilmengen heißen (Zufalls)-Ereignisse. Die Mengenlehre dient uns als Sprechweise, Ereignisse kurz und zweifelsfrei zu beschreiben.

verbal	mathematisch
Ereignisse A und B treffen ein	$A \cap B$
Ereignis A oder Ereignis B trifft ein	$A \cup B$
Ereignis A trifft nicht ein	A^c
Ereignis A trifft ein, Ereignis B aber nicht	$A \setminus B$
unmögliches Ereignis	$\emptyset$
sicheres Ereignis (= Ereignisraum)	Ω
Elementarereignis ω gehört zu A	$\omega \in A$
Elementarereignis ω gehört nicht zu A	$\omega \notin A$
alle Elementarereignisse von A gehören zu B	$A \subset B$

Beispiele für Mengensprech

$A =$ "ungerade Zahl gewürfelt" $= \{1, 3, 5\}$ und
$B =$ "Zahl kleiner 4 gewürfelt" $= \{1, 2, 3\}$

- $A \cap B = \{1, 3\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$
- $A^c = \{2, 4, 6\}$
- $A \setminus B = \{5\}$
- $A \cup B = \Omega \setminus \{4, 6\}$

Produkt

- Gegeben zwei Ereignisräume Ω_1 und Ω_2 und in jedem ein Ereignis
$$A \subset \Omega_1 \qquad B \subset \Omega_2$$
- Das Produktereignis $A \times B$ besteht aus allen Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$
- Mathematisch
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$
- Es ist ein Ereignis im Ereignisraum $\Omega_1 \times \Omega_2$

Ein Produkt mit 12 Elementen

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)	(a_1, b_4)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)	(a_2, b_4)
a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)	(a_3, b_4)

Beispiele für Produktereignisse

- Im Beispiel “Geschlechter von vier Studierenden” ist

$$\begin{aligned}\Omega &= \{m, w\} \times \{m, w\} \times \{m, w\} \times \{m, w\} \\ &= \{m, w\}^4\end{aligned}$$

- Zweifacher Wurf eines Würfels

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ &\quad (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ &\quad (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ &\quad (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ &\quad (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ &\quad (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit

- Was ist eine Wahrscheinlichkeit?
- Eine Wahrscheinlichkeit ist eine Modellannahme.
- Modellannahmen kommen her von
  - beobachteten relativen Häufigkeiten
  - abstrakten Überlegungen (z.B. faire Münze)
  - Konstruktion aus Teilsystemen (z.B. mehrfacher Münzwurf)
- Überprüfung des Modells am Experiment

Konsistenzregeln

Für jedes Ereignis A gebe es eine Zahl $P(A)$ mit

(P1) $P(A) \geq 0$ für alle A

(P2) $P(\Omega) = 1$

(P3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls A und B **disjunkte** Ereignisse sind, also keine gemeinsamen Elementarereignisse enthalten

Dann ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω, und (Ω, P) ist ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell des Zufallsexperiments.

Rechenregeln

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $A \subset B$, dann folgt $P(A) \leq P(B)$

Laplace-Verteilung

Die Laplace-Verteilung ist diejenige Verteilung, bei der alle Elementarereignisse dieselbe Wahrscheinlichkeit aufweisen.
Wir bezeichnen mit $|A|$ die Anzahl der Elemente von A. Dann

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Faire Münze

Der Würf einer fairen Münze realisiert die Laplace-Verteilung auf dem zweielementigen Ereignisraum $\Omega = \{A, Z\}$, wobei A=Adler und Z=Zahl

Wurf zweier fairer Würfel

Der Wurf zweier fairer Würfel realisiert die Laplace-Verteilung auf dem Ereignisraum $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$.

$$P(\text{“Sechserpasch”}) = \frac{1}{36}$$
$$P(\text{“eine 3 und eine 4”}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),{\color{blue}(3,4)},(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),{\color{blue}(4,3)},(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),{\color{red}(6,6)}\}\end{aligned}$$

Einfaches Beispiel

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt dreimal die 6?

$$|\Omega| = 6^3 = 216$$
$$A = \text{“drei Sechsen”} = \{(6, 6, 6)\}$$

Also

$$|A| = 1$$

und daher

$$P(A) = \frac{1}{216} = 0.004630$$

Trick: Übergang zum Komplementärereignis

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt mindestens eine 6?

$$A = \text{“mindestens eine Sechs”}$$
$$A^c = \text{“keine Sechs”} = \{1, 2, 3, 4, 5\}^3$$

Also

$$|A^c| = 5^3 = 125$$
$$P(A^c) = \frac{125}{216} = 0.5787$$

Schließlich

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.5787 = 0.4213$$

Diversitätsindex nach Simpson

Der *Diversitätsindex* nach Simpson ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei aus einer Artengemeinschaft zufällig ausgewählte Individuen derselben Art angehören. Je kleiner er ist, umso größer ist die Diversität.

Wir berechnen ihn für den Fall zweier Arten S_1 und S_2 mit n_1 bzw. n_2 Individuen.

Der Ereignisraum Ω besteht aus allen Auswahlen von zwei verschiedenen Individuen aus insgesamt $n_1 + n_2$ Individuen. Da dasselbe Individuum nicht zweimal gewählt werden kann, gilt

$$|\Omega| = (n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 - 1)$$

Diversitätsindex, Fortsetzung

Das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit gesucht ist, ist

$$E = A \cup B$$

wobei

$$A = \text{“beide gehören zu } S_1\text{”}$$
$$B = \text{“beide gehören zu } S_2\text{”}$$

Wie oben

$$|A| = n_1 \cdot (n_1 - 1) \qquad \text{und} \qquad |B| = n_2 \cdot (n_2 - 1)$$

Daher

$$P(A) = \frac{n_1 \cdot (n_1 - 1)}{(n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 - 1)}$$
$$P(B) = \frac{n_2 \cdot (n_2 - 1)}{(n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 - 1)}$$

Diversitätsindex für zwei Arten

A und B sind disjunkt. Daher $P(E) = P(A) + P(B)$. Der Diversitätsindex für zwei Arten beträgt

$$P(E) = \frac{n_1 \cdot (n_1 - 1) + n_2 \cdot (n_2 - 1)}{(n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 - 1)}$$

Beispiel zum Diversitätsindex

Für ein Waldgebiet wird die Mäusepopulation wie folgt geschätzt

- 500 Rötelmäuse
- 150 Feldmäuse

Der Diversitätsindex ist 0.6444