

Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

3. November 2010

- 1 Kombinatorik
 - Fakultät
 - Binomialkoeffizienten
 - Urnenmodelle

- 2 Binomialverteilung
 - Definition
 - Tabellen

Fakultät, Beispiel

- In der Lottotrommel sind 49 Kugeln. **Alle** Kugeln werden gezogen, die Reihenfolge wird notiert. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
- Es gibt 49 Möglichkeiten für die erste Kugel, 48 für die zweite, 47 für die dritte, ..., 2 für die 48-te (also die vorletzte), und 1 für die letzte
- Anzahl der Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} & 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ & = 608281864034267560872252163321295376887552831379210240000000000 \\ & = 6.083 \cdot 10^{62} \end{aligned}$$

- Diese Zahl schreibt man 49!

Fakultät

- Die Zahl

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

bezeichnet man als *Fakultät* von n

- Sie gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, n verschiedene Objekte anzuordnen
- Jede solche Anordnung bezeichnet man als *Permutation*
- Beispiele

$$1! = 1 \quad 2! = 2 \quad 3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120$$

- Außerdem definiert man $0! = 1$

Zahlenbeispiele

- $6! = 720$
- $12! = 479\,001\,600$
- $22! = 1.124 \cdot 10^{21}$
- $69! = 1.711 \cdot 10^{98}$
- $70! = 1.198 \cdot 10^{100}$

Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

- Aus der Lottotrommel werden 6 Kugeln gezogen
- Anzahl der Möglichkeiten **unter** Beachtung der Reihenfolge

$$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$$

- Taschenrechner Taste nPr

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

- Aus der Lottotrommel werden 6 Kugeln gezogen
- Anzahl der Möglichkeiten **ohne** Beachtung der Reihenfolge

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816$$

- Diese Zahl ist gleich

$$\frac{49!}{6! \cdot 43!}$$

- Sie heißt “49 über 6” und man schreibt sie $\binom{49}{6}$
- Taschenrechner: Taste nCr

Binomialkoeffizienten

n bezeichne die Gesamtzahl der Objekte, und k bezeichne die Anzahl der Züge.



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}$$

ist die Anzahl der möglichen Auswahlen von k Objekten aus n -Objekten.

- Die Zahl $\binom{n}{k}$ heißt *Binomialkoeffizient*. Man sagt “ n über k ”.

weitere Beispiele für Binomialkoeffizienten

- Möglichkeiten, 2 Elementen aus 4 auszuwählen

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

- Möglichkeiten, 3 Elementen aus 10 auszuwählen

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

- Möglichkeiten, 7 Elementen aus 10 auszuwählen

$$\binom{10}{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

Rechenregeln

Für jedes n und jedes $k \leq n$ gelten



$$\binom{n}{0} = 1$$



$$\binom{n}{1} = n$$

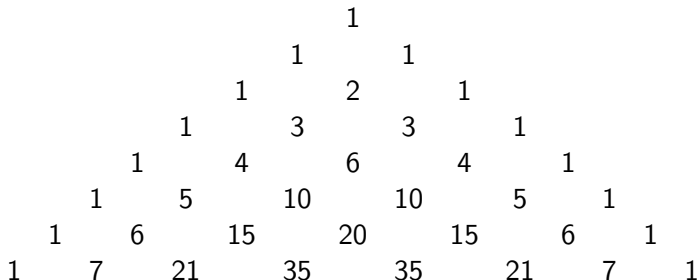


$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Das Pascalsche Dreieck zeigt die Binomialkoeffizienten, beginnend mit $\binom{0}{0}$



Urnenmodelle

Jeweils n Kugeln in der Urne, davon werden k gezogen

Urnenmodell I: Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

$$\text{Anzahl} = n^k$$

Urnenmodell II: Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

$$\text{Anzahl} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

Urnenmodell III: Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

$$\text{Anzahl} = \binom{n}{k}$$

Beispiel für Urnenmodell I

Frage: Wieviele Kombinationen hat ein dreistelliges Zahlenschloss?

Antwort:

- 3 Züge aus Urne mit 10 Elementen, nämlich den 10 Ziffern
- Ziffern können mehrfach auftreten: Ziehen mit Zurücklegen
- Reihenfolge spielt eine Rolle
- also $10^3 = 1000$ Möglichkeiten

Beispiel für Urnenmodell II

Frage: Bei einem Rennen starten 36 Läufer. Wie viele Kombinationen, das Siegertreppchen zu besetzen, gibt es?

Antwort:

- 3 Züge aus Urne mit 36 Elementen
- jeder Läufer gewinnt maximal eine Medaille: Ziehen ohne Zurücklegen
- Reihenfolge spielt eine Rolle
- also

$$36 \cdot 35 \cdot 34 = 42\,840$$

Möglichkeiten

Beispiel für Urnenmodell III

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei Mutationen auf 150 Basenpaare zu verteilen?

Antwort:

- 3 Züge aus Urne mit 150 Elementen
- Stelle ist entweder mutiert oder nicht: Ziehen ohne Zurücklegen
- Reihenfolge spielt keine Rolle
- also

$$\binom{150}{3} = 551\,300$$

Möglichkeiten

Beispiel: Lotterie

Eine Lotterie wird nach den folgenden Regeln abgehalten:

In einem Mischbehälter befinden sich 70 Kugeln, nämlich je 7 mit der Ziffern 0 bis 9. Nacheinander werden 7 Kugeln entnommen und in einer Reihe so ausgelegt, dass sie eine 7-stellige Zahl bilden. Wer diese Zahl auf seinem Los hat, erhält den Hauptgewinn.

Wie groß sind die Gewinnchancen der Lose 1234567 und 9999999?

Beispiel: Lotterie

Ziehen ohne Zurücklegen: Ereignisraum

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_7) \mid 1 \leq a_i \leq 70, a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$$

mit der Interpretation, dass beispielsweise die Kugeln $a_{05}, a_{15}, \dots, a_{65}$ jeweils eine 5 zeigen.

$$|\Omega| = \frac{70!}{63!} = 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdots 64 = 6\,041\,824\,588\,800$$

Es sei A das Ereignis, dass 1234567 gewinnt. $|A| = 7^7$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7^7}{70 \cdot 69 \cdot 68 \cdots 64} \cong 0.000\,000\,136307$$

Beispiel: Lotterie

Es sei B das Ereignis, dass 9999999 gewinnt. $|B| = 7!$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{7!}{70 \cdot 69 \cdot 68 \cdots 64} \cong 0.000\,000\,000\,834$$

Vergleich:

$$P(A) = 0.000\,000\,136\,307 \cong 1.36 \cdot 10^{-7}$$

$$P(B) \cong 0.000\,000\,000\,834 \cong 8.34 \cdot 10^{-10}$$

Standardsituation

- n unabhängige Wiederholungen eines ja/nein-Experiments
- das Ergebnis “ja” bezeichnet man als “Erfolg”
- die Wahrscheinlichkeit von “ja” sei p , genannt “Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelfall”
- $B_{n,p}(k)$ ist die Wahrscheinlichkeit von genau k Erfolgen
- z. B. $B_{n,p}(n) = p^n$ und $B_{n,p}(0) = (1 - p)^n$

Formel für die Binomialverteilung

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Erläuterungen zur Binomialverteilung

- Alternative Beschreibung statt “ja/nein”-Experiment:
Zufallswort der Länge n aus Alphabet mit zwei Buchstaben A und B
- Der Buchstabe A habe die Wahrscheinlichkeit p ; dann hat B die Wahrscheinlichkeit $1 - p$
- $B_{n,p}(k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, ein Wort zu ziehen, in dem A genau k -mal vorkommt

Beispiel zur Binomialverteilung

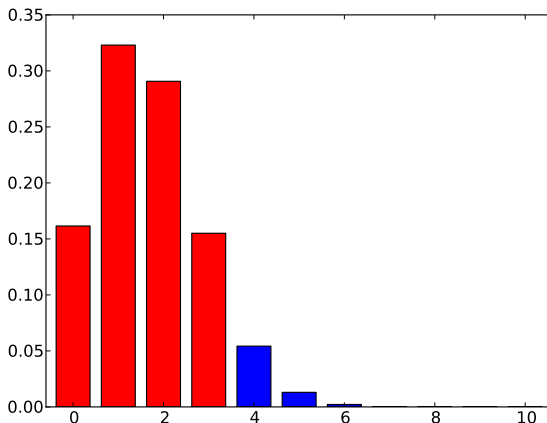
- 300 Studierende im Hörsaal
- davon 60% w, 40% m
- Wahrscheinlichkeit, dass genau die Hälfte davon männlich ist, beträgt

$$\begin{aligned} B_{300, 0.4}(150) &= \binom{300}{150} \cdot 0.4^{150} \cdot 0.6^{150} \\ &= 0.0001009 \end{aligned}$$

Stabdiagramm von $B_{10,1/6}$, Fortsetzung

Rote Fläche ist die Antwort auf die Frage:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen beim 10-fachen Wurf eines
fairen Würfels nicht mehr als 3 Sechsen?



Kumulierte Binomialverteilung

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen beim 10-fachen Wurf eines fairen Würfels nicht mehr als 3 Sechsen?

Antwort:

$$P = \sum_{k=0}^3 B_{10, 1/6}(k) = 0.93027$$

Für solche Fragen gibt es Tabellen der kumulierten Binomialverteilung

$$\sum_{k=0}^r B_{n, p}(k)$$

in Abhängigkeit von r

Tabelle der kumulierten $B_{10,p}$ Tabelle der Werte $\sum_{k=0}^r B_{n,p}$ für $n = 10$

r	p	0.15	0.16	$\frac{1}{6}$	0.17	0.18	0.19
0	0.	19687	17490	16151	15516	13745	12158
1		54430	50805	48452	47296	43916	40676
2		82020	79360	77523	76587	73720	70778
3		95003	93864	93027	92585	91166	89607
4		99013	98699	98454	98320	97868	97337
5		99862	99804	99756	99729	99633	99512
6		99987	99979	99973	99970	99956	99938
7		99999	99999	99998	99998	99996	99995

Lesehinweise für kumulierte Tabellen

- $\sum_{k=0}^3 B_{10,0.18}(k) = 0.91166$
- freie Felder oberhalb der Tabelle sind 0 im Rahmen der Tabellengenauigkeit
- freie Felder unterhalb der Tabelle sind 1 im Rahmen der Tabellengenauigkeit
- Tabellen erhalten Sie von mir

Beispiel Parasiten

- Bestimmte Fische erkranken mit 85% Wahrscheinlichkeit an einem Parasiten
- 47 Fische werden untersucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens 40 davon erkrankt?
- Gesucht

$$\sum_{k=0}^{40} B_{47, 0.85}(k)$$

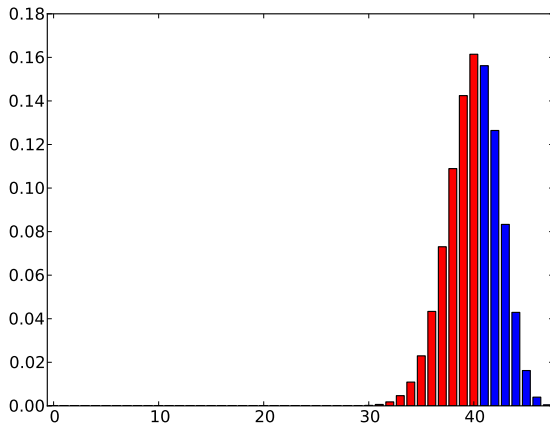
Graph von $B_{47,0.85}$ 

Tabelle der Werte $\sum_{k=0}^r B_{n,p}(k)$ für $n = 47$

r	p	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
27	0.	00001				
28		00002	00001			
29		00008	00003	00001		
30		00029	00012	00005	00002	00001
31		00093	00043	00018	00007	00002
32		00274	00137	00063	00026	00010
33		00742	00398	00199	00091	00038
34		01832	01060	00573	00286	00130
35		04128	02571	01503	00817	00408
36		08463	05663	03578	02115	01156
37		15768	11311	07707	04946	02957
38		26660	20441	14978	10408	06792
39		40904	33384	26208	19651	13952
40		57047	49285	41238	33208	25538
41		72665	65962	58411	50182	41543
42		85309	80597	74830	67964	60042
43		93639	91050	87606	83128	77447
44		97931	96887	95379	93236	90248
45		99552	99278	98847	98178	97153
46		99952	99917	99856	99754	99582

Beispiel Pharmapräparat, Fortsetzung

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 40 Fische erkrankt sind, ist gleich 0.57047

Beispiel Pharmapräparat

- Anderes Beispiel: 47 Mäuse sind erkrankt
- Ein Präparat mit Heilungswahrscheinlichkeit 88% wird eingesetzt
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 40 Mäuse geheilt?
- Gesucht

$$\sum_{k=40}^{47} B_{47,0.88}(k) = 1 - \sum_{k=0}^{39} B_{47,0.88}(k)$$

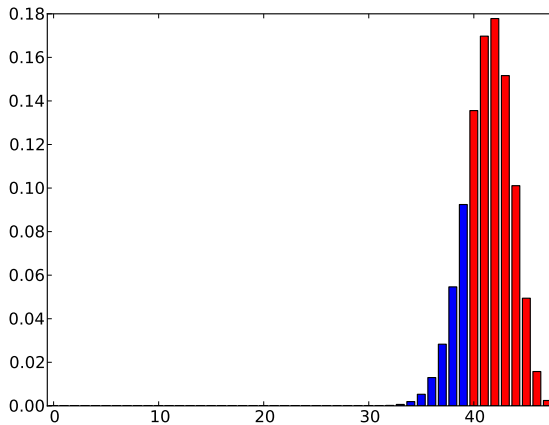
Graph von $B_{47,0.88}$ 

Tabelle der Werte $\sum_{k=0}^r B_{n,p}(k)$ für $n = 47$

r	p	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
27	0.	00001				
28		00002	00001			
29		00008	00003	00001		
30		00029	00012	00005	00002	00001
31		00093	00043	00018	00007	00002
32		00274	00137	00063	00026	00010
33		00742	00398	00199	00091	00038
34		01832	01060	00573	00286	00130
35		04128	02571	01503	00817	00408
36		08463	05663	03578	02115	01156
37		15768	11311	07707	04946	02957
38		26660	20441	14978	10408	06792
39		40904	33384	26208	19651	13952
40		57047	49285	41238	33208	25538
41		72665	65962	58411	50182	41543
42		85309	80597	74830	67964	60042
43		93639	91050	87606	83128	77447
44		97931	96887	95379	93236	90248
45		99552	99278	98847	98178	97153
46		99952	99917	99856	99754	99582

Pharmapräparat, Fortsetzung

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 40 Mäuse geheilt werden, ist

$$1 - \sum_{k=0}^{39} B_{47,0.88}(k) = 1 - 0.19651 = 0.80349$$