

Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

4. November 2010

- 1 Bedingte Wahrscheinlichkeit
 - Definition
 - Unabhängigkeit

Nutzung von Zusatzinfo

- Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist eine Wahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung von Zusatzinformationen
- Beispielsweise ist für einen 50-jährigen die Wahrscheinlichkeit, 80 Jahre zu werden, (etwas) höher als für ein Neugeborenes
- Allgemein wird mit $P(A|B)$ die Wahrscheinlichkeit von A bezeichnet, wenn bereits bekannt ist, dass B eingetreten ist

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bezeichnet man als *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A unter der *Hypothese B*

- Die Hypothese B ist also vorausgesetzt (im Beispiel ist jemand bereits 50 Jahre alt geworden)
- Das Ereignis A ist das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit interessiert (im Beispiel ist A das Ereignis, älter als 80 zu werden)
- Man bezeichnet $P(A)$ auch als *totale Wahrscheinlichkeit*, wenn man den Unterschied zu einer bedingten Wahrscheinlichkeit verdeutlichen will

Rechenregeln

- $P(A|B)$ ist eine Wahrscheinlichkeit für A , erfüllt also die Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten
- die wichtigste ist die Regeln für die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

Heuristische Begründung der Formel

- unter der Hypothese B ist B sicher, also $P(B|B) = 1$; daher wird durch $P(B)$ geteilt
- unter der Hypothese B sind diejenigen Elementarereignisse von A , die nicht in B liegen, irrelevant; daher steht im Zähler $P(A \cap B)$ und nicht $P(A)$

Begriffsklärung

Im Wattenmeer kommen Europäische Austern und Chinesische Austern vor. Kurgäste können die beiden Arten nur schwer auseinander halten. Ein zufällig ausgewählter Kurgast findet zufällig eine Auster. Zwei Ereignisse interessieren

A : “es handelt sich um eine europäische Auster”

B : “der Finder hält sie für eine europäische Auster”

Dann ist $P(B|A)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gefundene europäische Auster auch als solche erkannt wird und $P(A|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass man dem Finder glauben kann, wenn er behauptet, eine europäische Auster gefunden zu haben

Beispiel zur bedingten Wahrscheinlichkeit

- Sei E_{m50} das Ereignis, dass ein männliches Neugeborenes ein Alter von mindestens 50 Jahren erreichen wird; laut (österreichischer) Sterbetafel ist $P(E_{m50}) = 0.919$
- für 80 Jahre $P(E_{m80}) = 0.365$
- für weibliche Neugeborene $P(E_{w50}) = 0.958$ und $P(E_{w80}) = 0.566$
- dann wegen $E_{m50} \cap E_{m80} = E_{m80}$

$$P(E_{m80}|E_{m50}) = \frac{0.365}{0.919} = 0.397$$

- und

$$P(E_{w80}|E_{w50}) = \frac{0.566}{0.958} = 0.591$$

Produktformel

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Insbesondere sind A und B genau dann unabhängig, wenn

$$P(A|B) = P(A)$$