Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

25. November 2010

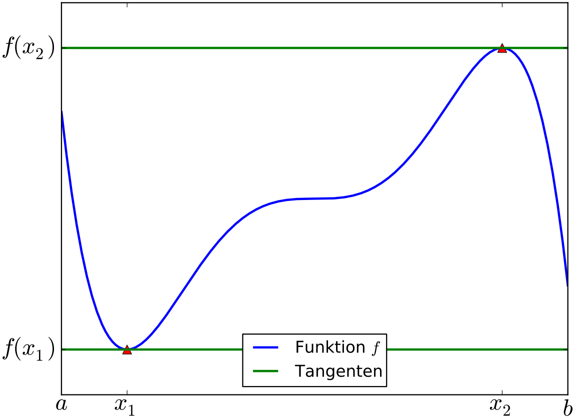
Extremalstellen

- Funktion f definiert auf Intervall

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

- x_0 mit $a \leq x_0 \leq b$ ist *Maximalstelle* von f, wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle x
- $f(x_0)$ ist dann das *Maximum* von f
- Analog sind *Minimalstelle* und *Minimum* erklärt
- Minimal- und Maximalstellen fasst man zusammen unter dem Begriff *Extremalstellen*

Extremalstellen: Skizze

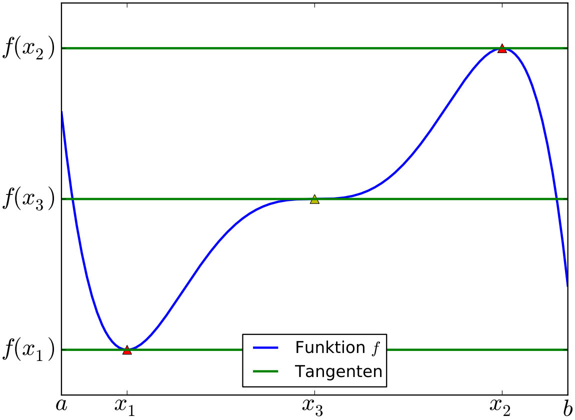


In den Extremalstellen verschwindet die Ableitung

Kritische Stellen

- x heißt *kritische Stelle* von f, wenn $f'(x) = 0$
- Alle Maximal- und Minimalstellen im Innern des Definitionsbereichs von f sind kritische Stellen
- Aber es gibt auch kritische Stellen, die keine Extremalstellen sind

Kritische Stellen, Skizze

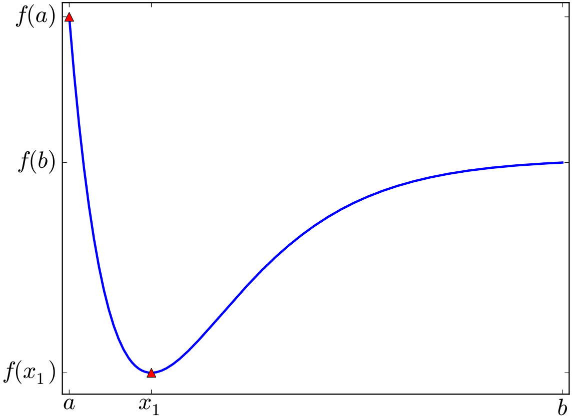


x_3 ist kritisch, aber nicht extremal

Randextrema

- Extremalstellen können im Innern liegen, dann sind sie kritische Stellen
- oder am Rand
- Randextremalstellen brauchen nicht kritisch zu sein

Randextrema



Randmaximum in a, Minimum im Inneren in x_1

Beispiel einer Kurvendiskussion

- Wir suchen Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x) = x - \ln(2x) \qquad \frac{1}{2} \leq x \leq 5$$

- Zur Bestimmung der kritischen Stellen leiten wir ab

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2x} \cdot 2 = 1 - \frac{1}{x}$$

- Einzige kritische Stelle ist die Lösung von

$$1 = \frac{1}{x}$$

Das ist $x = 1$

Beispiel einer Kurvendiskussion, Fortsetzung

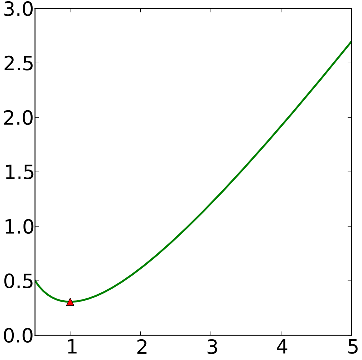
- Für die Suche nach den Extrema ist eine vollständige Kurvendiskussion nicht notwendig. Das Maximum wird in dem einzigen kritischen Punkt oder am Rand angenommen
- Also ist das gesuchte Maximum der größte der folgenden drei Werte:

$$
\begin{aligned}
f(\frac{1}{2}) &= \frac{1}{2} - \ln(1) = \frac{1}{2} \\
f(1) &= 1 - \ln(2) \cong 0.307 \\
f(5) &= 5 - \ln(10) \cong 2.70
\end{aligned}
$$

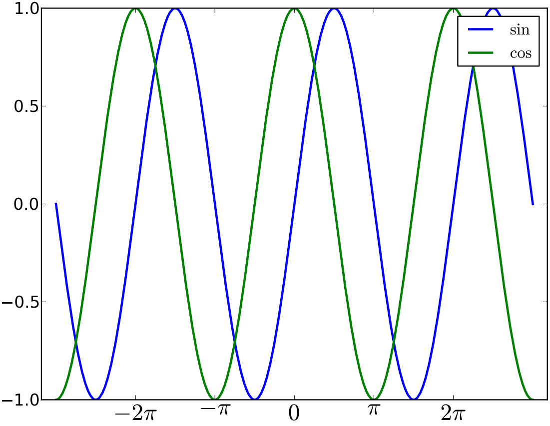
- Das Maximum ist also $f(5)$. Das Minimum ist der kleinste dieser drei Werte, also $f(1)$.

Beispiel einer Kurvendiskussion, Skizze

- 1 ist kritische Stelle und Minimalstelle
- in 5 liegt ein Randmaximum vor



Sinus und Cosinus



Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

- werden in Radiant gemessen (Taschenrechner entsprechend einstellen!)
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- Satz des Pythogoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

$$f(x) = \sin(x) \qquad g(x) = \cos(x)$$
$$f'(x) = \cos(x) \qquad g'(x) = -\sin(x)$$

Höhere Ableitungen:

$$f''(x) = -\sin(x) \qquad g''(x) = -\cos(x)$$
$$f'''(x) = -\cos(x) \qquad g'''(x) = \sin(x)$$
$$f''''(x) = \sin(x) \qquad g''''(x) = \cos(x)$$

Bedeutung der trigonometrischen Funktionen

- Sinus und Cosinus treten auf:
  - bei Berechnungen in der Geometrie, der Landvermessung und der Seefahrt
  - in dynamischen Systemen
- Besonderheit der trigonometrischen Funktionen $f = \sin$ und $f = \cos$ ist die Gleichung

$$f''(x) = -f(x)$$

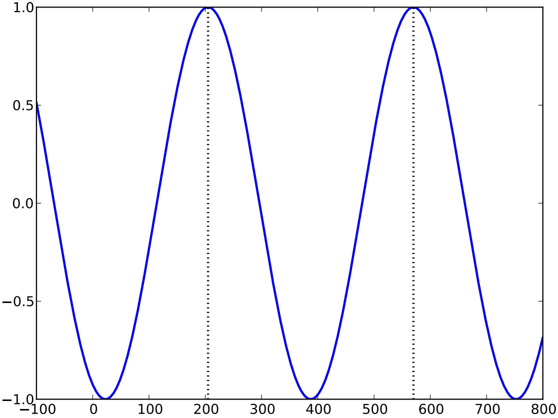
- Trigonometrische Funktionen treten in Modellen mit negativer Rückkopplung auf

Schwingungen

- Modelliere einen Schwingungsvorgang, der 365 Tage für einen Durchlauf braucht und am 205-ten Tag sein Maximum hat
- Zeit für einen Durchlauf heißt *Periode*
- Sinus und Cosinus haben die Periode 2π
- $\cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot x\right)$ hat Periode 365
- Um das Maximum in $x = 205$ zu bekommen, verschiebe den Graph um 205 Einheiten nach rechts
- gesuchte Funktion

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (x - 205)\right)$$

Schwingungen: Zeichnung

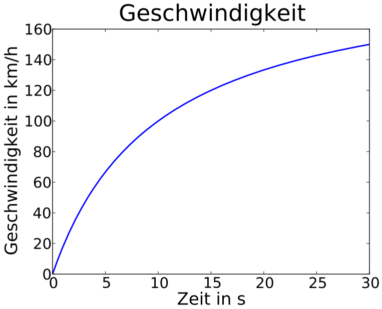


Beispiel aus der Physik

- Wenn $v(x)$ die Geschwindigkeit ist, dann ist $v'(x)$ die Beschleunigung
- Modell für die Geschwindigkeit eines Autos

$$v(x) = A \cdot \left(1 - \frac{1}{B \cdot x + 1}\right)$$

- Graph für $A = 200$ und $B = 0.1$



Beispiel aus der Physik, Fortsetzung

- Wenn
$$v(x) = A \cdot \left(1 - \frac{1}{B \cdot x + 1}\right)$$
die Geschwindigkeit ist, dann ist
$$v'(x) = \frac{A \cdot B}{(B \cdot x + 1)^2}$$
die Beschleunigung
- beide Graphen im Vergleich