

Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

1. Dezember 2010

1 Integralrechnung

- Flächeninhalt
- Stammfunktion
- Rechenregeln

2 Verteilungsfunktionen

- Dichten von Verteilungsfunktionen
- Erwartungswert und Varianz stetiger Zufallsvariabler

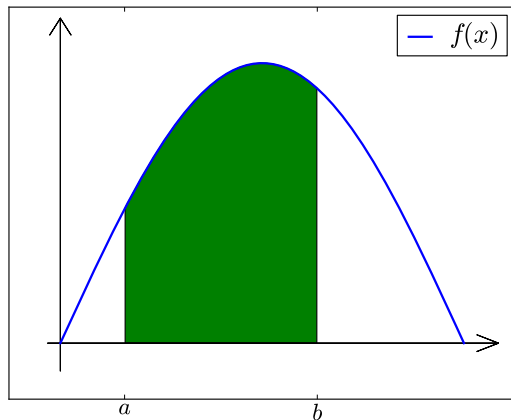
Flächeninhalt

- $f(x)$ eine Funktion, die keine negativen Werte annimmt
- a und b Intervallgrenzen
- den Inhalt der Fläche unter $f(x)$ zwischen a und b bezeichnet man mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

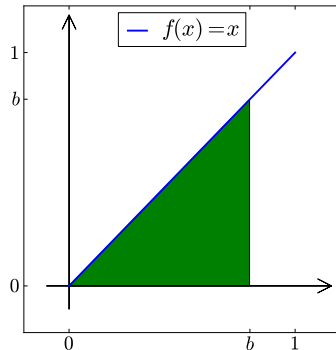
- $\int_a^b f(x) dx$ ist das *Integral von $f(x)$ in den Grenzen von a bis b*

Skizze: Flächeninhalt



Der Inhalt der grünen Fläche ist $\int_a^b f(x) dx$

Beispiel $f(x) = x$



$$\int_0^b x \, dx = \frac{1}{2}b^2$$

Integral

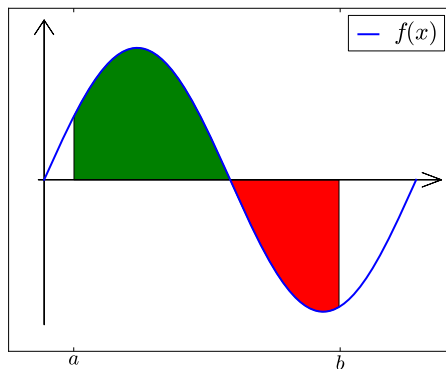
- Funktion $f(x)$ darf nun auch negative Werte annehmen
- Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx$$

die Differenz zwischen dem Flächeninhalt oberhalb und dem Flächeninhalt unterhalb der x -Achse

- $\int_a^b f(x) dx$ ist also negativ, wenn die Fläche unterhalb der x -Achse größer ist als die Fläche oberhalb

Skizze: Integral



Der Inhalt der grünen Fläche abzüglich des Inhalts der roten Fläche ist $\int_a^b f(x) dx$

Stammfunktion

- Falls

$$F'(x) = f(x)$$

- dann ist f die Ableitung von F
- und F ist eine *Stammfunktion* von f

- Man schreibt

$$\int f(x) dx = F(x)$$

- Das Zeichen $\int$ ist das “unbestimmte Integral”
- Das Zeichen $\int_a^b$ ist das “bestimmte Integral”
- Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann ist auch $F(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$, wenn C eine beliebige Konstante ist

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- Man schreibt

$$\int_a^b f(x) = F(x) \Big|_a^b$$

- Beispiel

$$\int_0^b x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^b = \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} 0^2 = \frac{1}{2} b^2$$

Wichtige Stammfunktionen

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

falls $n \neq -1$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int \exp(x) dx = \exp(x)$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

Integrationsregeln

C eine Konstante

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$$

Beispiele:

$$\int 5 \cdot x^3 dx = \frac{5}{4} x^4$$

$$\int 5 \cdot \exp(x) dx = 5 \cdot \exp(x)$$

Integrationsregeln

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Beispiel:

$$\int (x^3 + x^4) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$$

Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}\int x \cdot \exp(x) dx &= x \cdot \exp(x) - \int \exp(x) dx \\ &= x \cdot \exp(x) - \exp(x)\end{aligned}$$

Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$$

Speziell für Konstante C

$$\int_a^b f(C \cdot x) dx = \frac{1}{C} \cdot \int_{C \cdot a}^{C \cdot b} f(x) dx$$

Beispiel:

$$\int_0^{\pi} \sin(5x) dx = \frac{1}{5} \int_0^{5\pi} \sin(x) dx = \frac{1}{5} \cdot (-\cos(5\pi) + \cos(0)) = \frac{2}{5}$$

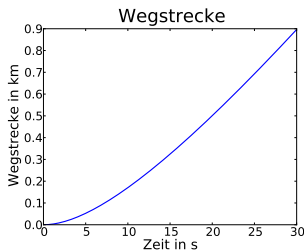
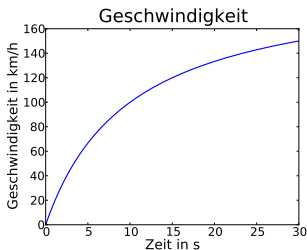
Beispiel aus der Physik, Fortsetzung

- Formel für die Geschwindigkeit

$$v(x) = A \cdot \left(1 - \frac{1}{B \cdot x + 1}\right)$$

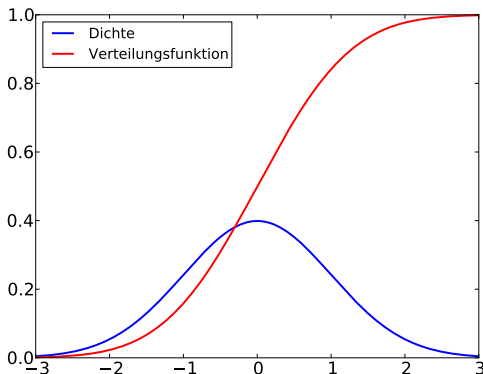
- Zurückgelegte Wegstrecke zur Zeit t

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t v(x) \, dx = \int_0^t A \cdot \left(1 - \frac{1}{B \cdot x + 1}\right) \, dx \\ &= A \cdot t - \frac{A}{B} \cdot \ln(B \cdot t + 1) \end{aligned}$$



Dichten von Verteilungsfunktionen

- Wenn $F(x)$ Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen ist, dann bezeichnet man $f(x) = F'(x)$ als zugehörige *Dichte*
- Beispiel: Dichte und Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung



Bedeutung der Dichte

- Wenn $f(x)$ die Dichte der Zufallsvariablen X ist, dann

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

- Speziell

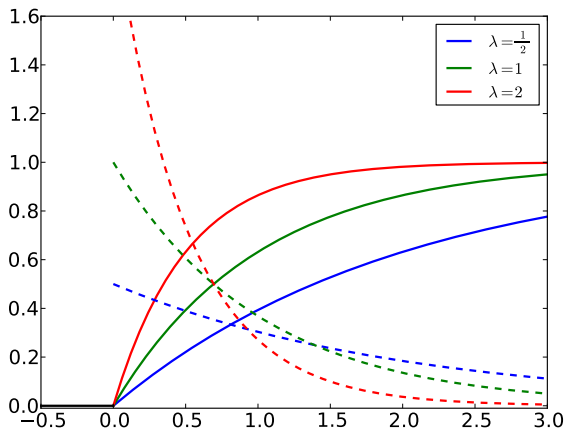
$$P(X = a) = \int_a^a f(x) dx = 0$$

- Also

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$$

für **stetige** Verteilungen

Dichte und Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung



Verteilungsfunktionen (durchgezogene Linien) und Dichten (gestrichelt) von Exponentialverteilungen

Dichte der Exponentialverteilung

- Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

- Zugehörige Dichte

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \cdot x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

- In welchem Intervall von einer Sekunde Dauer ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des erwarteten Ereignisses am größten?
- Im ersten, und zwar unabhängig von der mittleren Wartezeit

Dichte und Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

- Die Dichte der Standardnormalverteilung ist die *Gaußsche Glockenkurve*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- Also

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

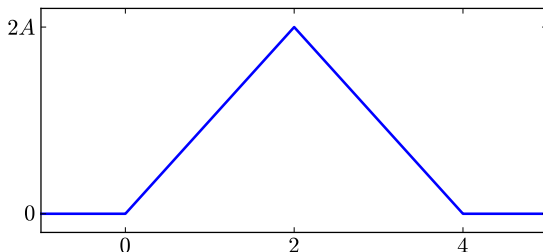
- Eine explizitere Formel gibt es nicht

Beispiel: stetige Dreiecksverteilung

- Jede Funktion $f(x) \geq 0$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ ist Dichte eine Verteilung
- Beispiel: Für welchen Wert A ist die Dreiecksfunktion

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot x, & 0 \leq x \leq 2 \\ A \cdot (4 - x), & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Dichte einer Zufallsvariablen?



Stetige Dreiecksverteilung, Fortsetzung

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_0^4 f(x) dx \\&= \int_0^2 A \cdot x dx + \int_2^4 A \cdot (4 - x) dx \\&= A \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + A \cdot \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^4 \\&= 2A + A \cdot (16 - 8) - A \cdot (8 - 2) \\&= 2A + 2A = 4A\end{aligned}$$

Für $A = \frac{1}{4}$ ist $f(x)$ die Dichte einer Verteilung

Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen

- f sei die Dichte von X
- Der Erwartungswert von X ist

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

- Das ist analog zur Formel

$$E(X) = \sum_k k \cdot P(X = k)$$

für diskrete Zufallsvariable

Erwartungswert für normalverteilte Zufallsvariable

- X sei standardnormalverteilt, dann

$$E(X) = 0$$

- X sei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, dann

$$E(X) = \mu$$

Erwartungswert für exponentialverteilte Zufallsvariable

X sei exponentialverteilt zum Parameter λ

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx \\ &= x \cdot \frac{\lambda}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx \\ &= 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{\lambda} \cdot (0 - 1) \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Varianz einer stetigen Zufallsvariablen

- f sei die Dichte von X
- $E(X) = \mu$
- Die Varianz von X ist

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \, dx$$

- Das ist analog zur Formel

$$\text{Var}(X) = \sum_k (k - \mu)^2 \cdot P(X = k)$$

für diskrete Zufallsvariable

- Die Streuung von X ist $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Varianz von normalverteilten bzw. exponentialverteilten Zufallsvariablen

- X sei verteilt gemäß $N(\mu, \sigma^2)$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

- X sei exponentialverteilt zum Parameter λ

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Beispiel zur Modellbildung

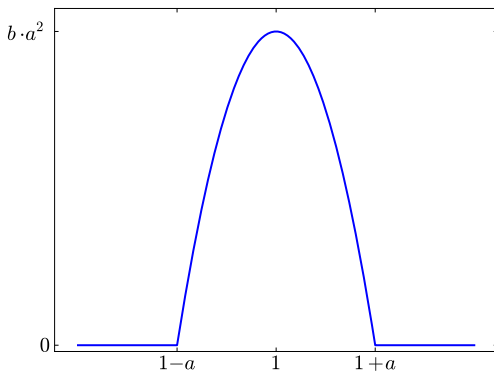
- Roggenpflanzen erreichen eine mittlere Höhe von $1m$. Dabei streut die Höhe um $20cm$. Welcher Prozentsatz aller Pflanzen erreicht mindestens $1.10m$ Höhe?
- X sei die Höhe der Pflanze in m
- Früheres Modell: X verteilt gemäß $N(1, 0.04)$
- (unbedeutender) Nachteil: $P(X < 0) \neq 0$
- Diesen Nachteil vermeidet das neue Modell
- Ansatz: Verteilung mit Dichte der Form

$$f(x) = \begin{cases} b \cdot (a^2 - (x - 1)^2), & 1 - a \leq x \leq 1 + a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für noch zu bestimmende Parameter a und b

Graph der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} b \cdot (a^2 - (x-1)^2), & 1-a \leq x \leq 1+a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Bestimmung der Parameter

- Die beiden Parameter a und b bestimmen sich über die beiden Gleichungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 \cdot f(x) dx = 0.04$$

- Die erste Gleichung stellt sicher, dass f Dichte einer Verteilung ist
- Die zweite Gleichung bedeutet $\text{Var}(X) = 0.04$
- $E(X) = 1$ ist aus Symmetriegründen automatisch richtig

Bestimmung der Parameter, Fortsetzung

- Bestimme Stammfunktion von $f(x)$

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= b \cdot \int (a^2 - (x-1)^2) dx \\ &= b \cdot \int (a^2 - x^2 + 2x - 1) dx \\ &= b \cdot \left(a^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} + x^2 - x \right)\end{aligned}$$

- Stammfunktion von $f(x)$

$$F(x) = b \cdot \left(a^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} + x^2 - x \right)$$

Bestimmung der Parameter, Fortsetzung

$$F(1+a) = b \cdot \left(\frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$F(1-a) = b \cdot \left(-\frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \int_{1-a}^{1+a} f(x) dx &= F(1+a) - F(1-a) \\ &= \frac{4}{3} \cdot b \cdot a^3 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung lautet

$$\frac{4}{3} \cdot b \cdot a^3 = 1$$

Bestimmung der Parameter, Fortsetzung

- Stammfunktion von $(x-1)^2 \cdot f(x)$

$$\begin{aligned} & \int (x-1)^2 \cdot f(x) dx \\ &= b \cdot \left(-\frac{x^5}{5} + x^4 + (a^2 - 6) \cdot \frac{x^3}{3} - (a^2 - 2) \cdot x^2 + (a^2 - 1) \cdot x \right) \end{aligned}$$

- $1+a$ und $1-a$ einsetzen und vereinfachen

$$\int_{1-a}^{1+a} (x-1)^2 \cdot f(x) dx = \frac{4}{15} \cdot b \cdot a^5$$

- Die zweite Gleichung ist

$$\frac{4}{15} \cdot b \cdot a^5 = 0.04$$

Bestimmung der Parameter, Lösung der Gleichungen

$$\frac{4}{3} \cdot b \cdot a^3 = 1$$

$$\frac{4}{15} \cdot b \cdot a^5 = 0.04$$

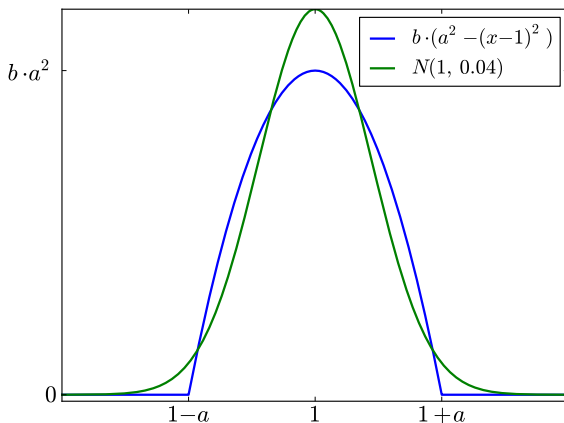
Erste Gleichung in zweite einsetzen

$$\begin{aligned} 0.04 &= \frac{4}{15} \cdot b \cdot a^5 \\ &= \frac{1}{5} \cdot a^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot b \cdot a^3 \\ &= \frac{1}{5} \cdot a^2 \end{aligned}$$

Also

$$a = \sqrt{5 \cdot 0.04} = 0.4472 \quad b = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a^3} = 8.385$$

Vergleich der beiden Dichten



Vergleich der Verteilungsfunktionen

