

Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

2. Dezember 2010

- 1 Dynamische Systeme
 - Differentialgleichungen
 - Der harmonische Oszillator
 - Das FitzHugh-Nagumo Modell

Dynamische Systeme

- Ein dynamisches System ist ein Modell, welches den zeitlichen Ablauf eines Vorgangs beschreibt
- Eine Methode, ein dynamisches System zu formulieren, besteht in der Angabe von Differentialgleichungen

Einfache Differentialgleichung: Freier Fall

- g die Gravitationskonstante
- t die Zeit, x die Höhe
- Gleichung des freien Falls

$$x''(t) = -g$$

- Stammfunktion: $x'(t) = -g \cdot t + v_0$
- v_0 ist die Anfangsgeschwindigkeit
- Nochmal Stammfunktion: $x(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$
- x_0 ist die Starthöhe (genannt Anfangswert)

Differentialgleichungen

- Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung für die Ableitung einer Größe
- das kann auch die zweite Ableitung sein
- zur Lösung müssen Anfangswerte bekannt sein
- und zwar ein Anfangswert, wenn nur die erste Ableitung vorkommt
- zwei, wenn die zweite Ableitung vorkommt, usw.

Differentialgleichung der Exponentialfunktion

- Wachstumsprozess

$$x'(t) = \lambda \cdot x(t)$$

Lösung

$$x(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Hierbei ist C eine beliebige Zahl

- Abklingprozess

$$x'(t) = -\lambda \cdot x(t)$$

Lösung

$$x(t) = C \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Beispiel

- Ein Messwert klingt ab gemäß der Differentialgleichung

$$x'(t) = -0.02 x(t)$$

Zur Zeit $t = 10$ hat er den Wert 25. Was ist die Formel für seinen zeitlichen Verlauf?

- Lösung mit unbekanntem C

$$x(t) = C \cdot e^{-0.02t}$$

- C wird angepasst an Anfangsbedingung

$$25 = C \cdot e^{-0.02 \cdot 10} = C \cdot e^{-0.2} = 0.8187C$$

- Also $C = 30.54$
- Formel für die zeitliche Entwicklung des Messwerts ist

$$x(t) = 30.54 \cdot e^{-0.02 \cdot t}$$

Der harmonische Oszillator

- t die Zeit, x die Auslenkung
- Differentialgleichung

$$x''(t) = -x(t) - \frac{1}{20}x'(t) + c \cdot I(t)$$

- $I(t)$ ist eine Anregung von außen
- Verwandle in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung

$$x'(t) = v(t) \quad v'(t) = -x(t) - \frac{1}{20}v(t) + c \cdot I(t)$$

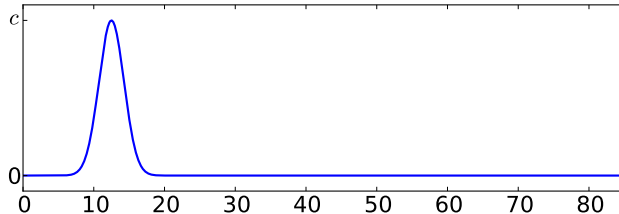
- x ist weiterhin die Auslenkung, v ist eine Hilfsgröße
- Im speziellen Fall ist v die Geschwindigkeit

Äußere Anregung

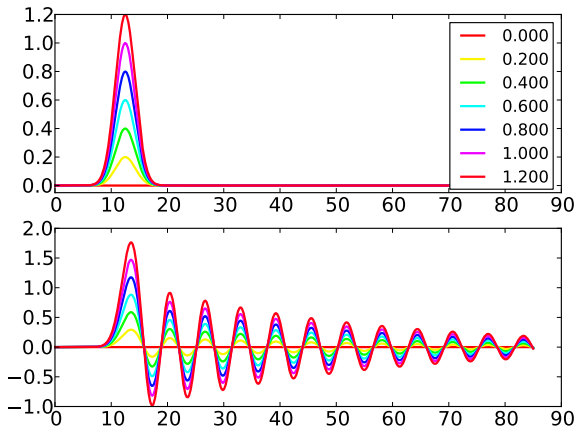
Impulsanregung

$$I(t) = c \cdot e^{-(0.4 \cdot t - 5)^2}$$

für verschiedene Werte von c



Graphen von Lösungen

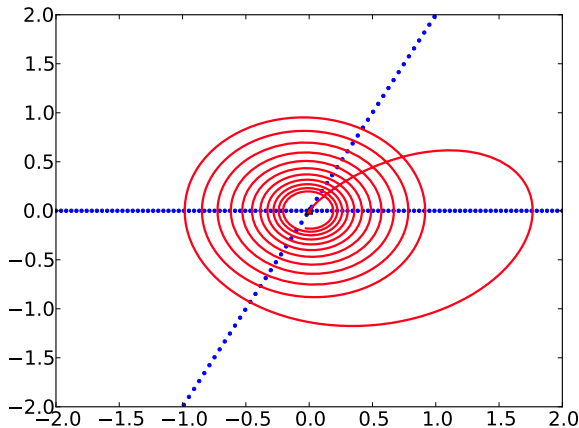


Oben: Anregung, unten: Auslenkung

Der Phasenraum

- Gezeichnet wird in der Ebene die Kurve durch die Punkte $(x(t), v(t))$
- Qualitatives Verhalten
- aber Zeit nicht mehr sichtbar

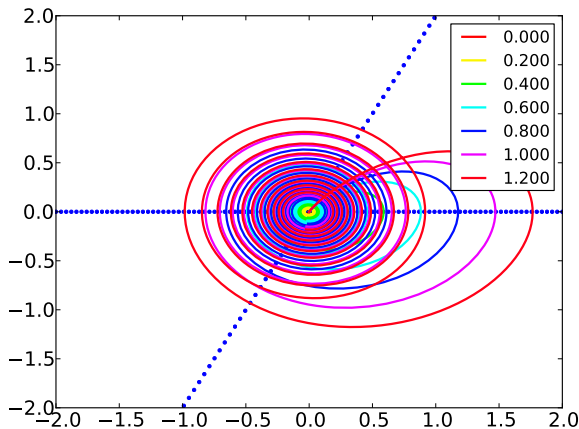
Phasendiagramm des harmonischen Oszillators, einzelne Kurve



Nullklinen

- Die gepunkteten Linien sind die *Nullklinen*
- Dort wechseln die Ableitungen $x'(t)$ und $v'(t)$ ihr Vorzeichen
- Am Schnittpunkt der Nullklinen liegt ein stationärer Punkt
- Beim Oszillator ist das der Nullpunkt

Phasendiagramm des harmonischen Oszillators, mehrere Kurven



Das FitzHugh-Nagumo Modell

- Das FitzHugh-Nagumo Modell beschreibt das Potenzial (die Spannung) an der Membran einer einzelnen Nervenzelle
- Größen
 - das Potenzial $V(t)$
 - eine Hilfsgröße $W(t)$, die den Abbau des Potenzials beschreibt
 - äußere Anregung $I(t)$
- Differentialgleichung

$$V'(t) = V(t) - \frac{1}{3}(V(t))^3 - W(t) + I(t)$$

$$W'(t) = 0.08 \cdot (V(t) + 0.7 - 0.8 \cdot W(t))$$

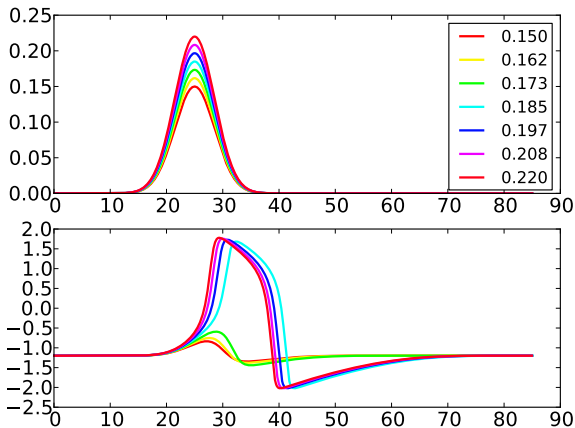
Differentialgleichungen des FitzHugh-Nagumo Modells

$$V'(t) = V(t) - \frac{1}{3}(V(t))^3 - W(t) + I(t)$$

$$W'(t) = 0.08 \cdot (V(t) + 0.7 - 0.8 \cdot W(t))$$

- Für kleine Werte von $V(t)$ wächst $V(t)$
- Für große Werte von $V(t)$ schrumpft $V(t)$ dann wieder

Lösungen

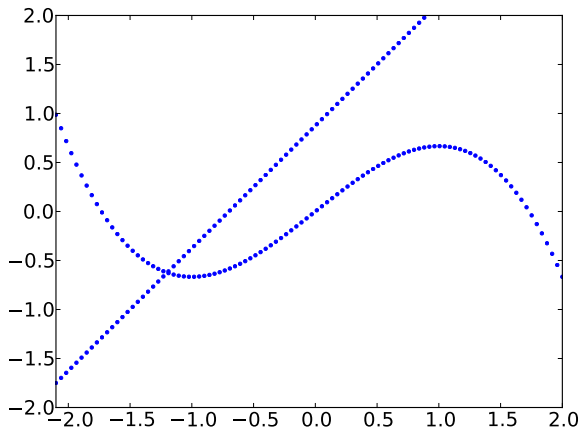


Oben: Impulsanregung; unten: Antwort des Systems

Schwelle

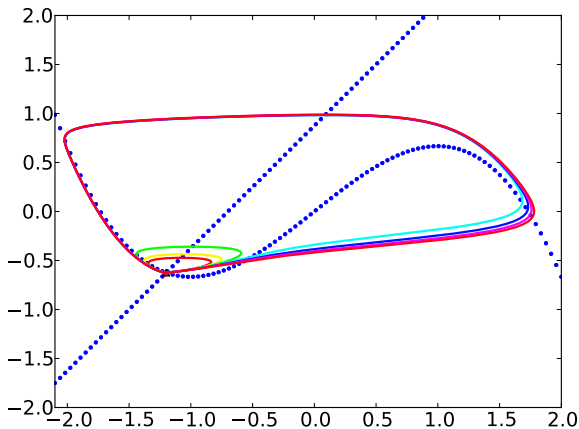
- In der Nähe von $c = 0.18$ liegt ein Schwellenwert für die Anregung
- Unterhalb des Schwellenwerts sehr kleine Antwort
- Oberhalb des Schwellenwerts deutliche Antwort
- Das erklärt sich aus dem Phasendiagramm

Nullklinen des FitzHugh-Nagumo Modells



Im Schnittpunkt der Nullklinen liegt der stationäre Punkt

Phasendiagramme im FitzHugh-Nagumo Modell



Qualitative Erklärung der Schwelle

- Alle Kurven starten im stationären Punkt und laufen dann zuerst nach rechts
- Ohne Anregung laufen Kurven oberhalb der geschwungenen Nullkline nach links und unterhalb nach rechts
- Bei der hellblauen Kurve ist die Anregung so groß ist, dass die Lösungskurve unterhalb der Nullkline gerät
- Dann muss sie so lange nach rechts laufen, bis sie wieder oberhalb ist