Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Rüdiger W. Braun

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

23. Dezember 2010

1. Tests für Erwartungswerte
   - Teststatistik
   - Gauß-Test
   - Zusammenhang zu Konfidenzintervallen
   - t-Test für Erwartungswerte

Teststatistik

- Bei stetigen Verteilungen verwendet man Quantile
- Man berechnet aus den Daten eine Größe, die man mit dem Quantil vergleicht
- Diese Größe heißt *Teststatistik*

Tests für Erwartungswerte in Normalverteilungsmodellen

Es gibt zwei Tests für Erwartungswerte in Normalverteilungsmodellen

Gauß-Test	bei bekannter Varianz
t-Test	bei unbekannter Varianz

Gauß-Tests für Erwartungswerte

- $X_1, \ldots, X_n$ bezeichnen unabhängig erhobene, gleichartige Messwerte.
- Verteilungsvoraussetzungen: Alle X_j sind normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ^2
- Ziel: μ soll mit einem festen Referenzwert μ_0 verglichen werden.
- x_j seien Realisierungen der X_j
- Bestimme den arithmetischen Mittelwert der Daten

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

- Der Wert der Teststatistik ist

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

Gauß-Tests, Fortsetzung

- Das Signifikanzniveau sei α
- Bestimme zugehörige Quantile der Standardnormalverteilung

$q_{1-\alpha/2}$	beim zweiseitigen Test
$q_{1-\alpha}$	bei einem einseitigen Test

- Entscheidung:

  $H_0 = \{\mu = \mu_0\}$: Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt, wenn $|t| > q_{1-\alpha/2}$

  $H_0 = \{\mu \geq \mu_0\}$: Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt, wenn $t < -q_{1-\alpha}$

  $H_0 = \{\mu \leq \mu_0\}$: Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt, wenn $t > q_{1-\alpha}$

Gauß-Tests, Fortsetzung

Die drei vorgestellten Tests haben verschiedene Namen:

$H_0 = \{\mu = \mu_0\}$: Zweiseitiger Gauß-Test

$H_0 = \{\mu \geq \mu_0\}$: Einseitiger unterer Gauß-Test

$H_0 = \{\mu \leq \mu_0\}$: Einseitiger oberer Gauß-Test

Beispiel: Filter

- Sie haben bei einem Händler für Laborartikel eine Partie Filter bestellt. Sie sind nur dann bereit, die Ware abzunehmen, wenn zum Niveau $\alpha = 0.05$ sicher ist, dass der Mittelwert der Porengröße weniger als $3.6 \mu m$ beträgt.
- Sie wissen von irgendwoher, dass die Streuung der Größe der Poren $0.25 \mu m$ beträgt.
- Sie messen 30 Filter aus und finden folgende Werte

Porengröße in μm	Anzahl der Beobachtungen
3.0	2
3.2	4
3.4	6
3.6	8
3.7	8
4.0	2

Filter, Fortsetzung

- Einseitiger unterer Gaußtest
- Die Nullhypothese ist $H_0 = \{\mu \geq 3.6\}$
- Das arithmetische Mittel der Beobachtungsdaten beträgt $\overline{x} = 3.52$
- Die Teststatistik ist

$$t = \frac{\overline{x} - 3.6}{0.25} \cdot \sqrt{30} = -\frac{0.08}{0.25} \cdot 5.477 = -1.753$$

- Das Quantil ist

$$q_{0.95} = 1.645$$

- Wegen $t < -q_{0.95}$ wird die Nullhypothese abgelehnt.
- Die Lieferung wird akzeptiert.

Filter, Fortsetzung

- Der kritische Bereich besteht aus allen Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$, für deren Teststatistik gilt

$$t < -1.645$$

- Wir wollen den kritischen Bereich explizit hinschreiben

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{30} = t < -1.645$$

ist äquivalent zu

$$\overline{x} < \mu_0 - 1.645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{30}} = 3.6 - 1.645 \cdot \frac{0.25}{5.477} = 3.525$$

- Der kritische Bereich ist

$$K_1 = \left\{ (x_1, \ldots, x_{30}) \;\middle|\; \frac{1}{30} \sum_{j=1}^{30} x_j < 3.525 \right\}$$

p-Wert für oberen Gauß-Tests

- Der p-Wert war definiert als das kleinste Signifikanzniveau, zu dem die Nullhypothese noch abgelehnt werden kann
- Beispiel oberer Gauß-Test
- Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn $t > q_{1-\alpha}$
- Da Φ monoton wächst, bedeutet das

$$\Phi(t) > 1 - \alpha$$

- Der Grenzfall ist der p-Wert

$$p = 1 - \Phi(t)$$

p-Werte für Gauß-Tests

- Zusammenfassung
  $H_0 = \{\mu = \mu_0\}$: $p = 2\big(1 - \Phi(|t|)\big)$
  $H_0 = \{\mu \geq \mu_0\}$: $p = \Phi(t)$
  $H_0 = \{\mu \leq \mu_0\}$: $p = 1 - \Phi(t)$
- Im Filterbeispiel beträgt der p-Wert

  $$p = \Phi(t) = \Phi(-1.753) = 1-\Phi(1.753) \cong 1-0.9599 = 0.0401$$

  also rund 4%

Zusammenhang zu Konfidenzintervallen

- Bestimme für die Filterdaten die obere Vertrauensgrenze eines einseitigen Konfidenzintervalls zum Konfidenzniveau 95%

$$G_o = \overline{x} + \frac{\sigma \cdot q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} = 3.52 + \frac{0.25 \cdot 1.645}{\sqrt{30}} = 3.595$$

- Zum Konfidenzniveau 95% ist sicher, dass die Porengröße höchstens $3.595 \mu m$ beträgt
- Da das kleiner als die maximal zulässigen $3.6 \mu m$ ist, wird die Lieferung akzeptiert

Zusammenhang zu Konfidenzintervallen, Fortsetzung

- Die Ungleichung $G_0 < \mu_0$ bedeutet ausgeschrieben

$$\overline{x} + \frac{\sigma \cdot q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} < \mu_0$$

- Das ist gleichwertig zu

$$\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} < -q_{1-\alpha}$$

- d. h. zu $t < -q_{1-\alpha}$

t-Tests für Erwartungswerte

- $X_1, \ldots, X_n$ bezeichnen unabhängig erhobene, gleichartige Messwerte.
- Verteilungsvoraussetzungen: Alle X_j sind normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und **un**bekannter Varianz σ^2
- Ziel: μ soll mit einem festen Referenzwert μ_0 verglichen werden.
- x_j seien Realisierungen der X_j
- Bestimme arithmetisches Mittel und Stichprobenstreuung

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \qquad \text{und} \qquad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2}$$

- Die Teststatistik ist

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s_x} \sqrt{n}$$

t-Tests, Fortsetzung

- Das Signifikanzniveau sei α
- Im Gegensatz zum Gauß-Test müssen nun die Quantile der t-Verteilung verwendet werden

$t_{n-1,\,1-\alpha/2}$	beim zweiseitigen Test
$t_{n-1,\,1-\alpha}$	bei einem einseitigen Test

- Entscheidung:

  $H_0 = \{\mu = \mu_0\}$: Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt, wenn
  $|t| > t_{n-1,\,1-\alpha/2}$

  $H_0 = \{\mu \geq \mu_0\}$: Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt, wenn
  $t < -t_{n-1,\,1-\alpha}$

  $H_0 = \{\mu \leq \mu_0\}$: Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt, wenn
  $t > t_{n-1,\,1-\alpha}$

Beispiel: Baumschule

- Bauer S. Claus besitzt eine Baumschule
- Gemeinsam mit seinem Mitarbeiter K. Ruprecht beschließt er, die Christbäume auf Feld 13 zu verkaufen, falls ihre mittlere Höhe $1.88m$ übersteigt
- Das soll zum Signifikanzniveau 5% festgestellt werden
- Die Höhe von Christbäumen ist bekanntlich normalverteilt; man einigt sich daher auf einen t-Test

photo: nightthree auf flickr

Baumschule: Fortsetzung

- 10 Bäume werden sorgfältig vermessen

Baum	1	2	3	4	5
Höhe	2.05	2.02	1.86	1.81	1.87

Baum	6	7	8	9	10
Höhe	1.93	1.81	2.00	2.01	1.88

- Dann $\overline{x} = 1.924$ und $s = 0.09021$
- Damit berechnen die beiden die Teststatistik

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{1.924 - 1.88}{0.09021} \cdot \sqrt{10} = 1.542$$

- Benötigt wird das Quantil $t_{9,\,0.95} = 1.833$
- Die Bäume bleiben stehen