Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. R. Braun

SS 2003
23.04.2003
Blatt 1

Übungen zur Funktionalanalysis

1. Seien E und F normierte Räume. Zeigen Sie, dass $E \times F$ durch $\|(x, y)\| := \max(\|x\|, \|y\|)$, $(x, y) \in E \times F$, zu einem normierten Raum wird.

2. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie

   (a) Die Abbildung
   $$+\colon E \times E \to E, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$
   ist gleichmäßig stetig.

   (b) Die Abbildung
   $$\cdot\colon \mathbb{K} \times E \to E, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$
   ist stetig.

   (c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\cdot$ aus Teil (b) außer im Fall $E = \{0\}$ nicht gleichmäßig stetig ist.

   Die Produkte seien dabei jeweils mit der Norm aus Aufgabe 1 versehen.

3. Eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ werde als Matrix $(a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ dargestellt. Die Räume $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ tragen jeweils die Supremumsnorm. Zeigen Sie
   $$\|A\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|.$$
   Diese Operatornorm heißt *Zeilensummennorm.*

4. Der $C^1[0, 1]$ sei ausnahmsweise mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)|$ versehen. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung
   $$A\colon (C^1[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty), \quad f \mapsto f',$$
   unstetig ist.

Abgabe: 30.04.2003, 14:00