Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. R. Braun

SS 2003
25.06.2003
Blatt 10

Übungen zur Funktionalanalysis

1. Gegeben sei der Operator

$$T\colon C[0,1] \to C[0,1],$$
$$Tf(x) = \int_0^x \int_0^t f(s)\,ds\,dt - x\int_0^1 \int_0^t f(s)\,ds\,dt.$$

   (a) Zeigen Sie, dass T kompakt ist.

   (b) Zeigen Sie $\operatorname{Bild} T \subset C^2[0,1]$.

   (c) Zeigen Sie $(Tf)'' = f$ für alle $f \in C[0,1]$.

   (d) Zeigen Sie $Tf(0) = Tf(1) = 0$ für alle $f \in C[0,1]$.

   (e) Bestimmen Sie $\sigma(T)$.

   (f) Bestimmen Sie $\ker T$.

2. Sei $1 \le p \le \infty$, aber $p \ne 2$. Zeigen Sie, dass ℓ^p kein Hilbertraum ist.

3. Sei E ein Hilbertraum, und sei $A\colon E \to E$ linear mit $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in E$. Zeigen Sie die Stetigkeit von A.

   Hinweis: Verwenden Sie eine der Folgerungen aus dem Satz von Baire.

Abgabe: 02.07.2003 in der Übung