

## Übungen zur Funktionalanalysis

1. Sei  $F$  ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums  $E$ . Sei  $y \in F'$ . Zeigen Sie die Existenz einer Fortsetzung  $Y \in E'$  mit  $Y|_F = y$  und  $\|Y\| = \|y\|$ , ohne den Satz von Hahn-Banach zu verwenden.
2. Sei  $E$  ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum. Zeigen Sie die Existenz einer Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $E$ , so dass  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  konvergiert und  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  divergiert.
3. Seien  $E$  ein Hilbertraum und  $P: E \rightarrow E$  eine orthogonale Projektion. Zeigen Sie
  - (a)  $\text{Bild}(\text{id} - P) = \ker P$ ,
  - (b)  $\ker(\text{id} - P) = \text{Bild } P$ .
4. Für  $t \in [-1, 1]$  definiere die *Tschebyscheff-Polynome* durch

$$T_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & n = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos t), & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie

- (a)  $T_n$  ist ein Polynom vom Grad  $n$ .  
*Hinweis:*  $\cos nx = \text{Re } e^{inx}$ .
- (b)  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  bilden ein Orthogonalsystem in  $L^2([-1, 1], \mu)$  für das Maß

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- (c) Das Orthogonalsystem  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist vollständig in  $L^2([-1, 1], \mu)$ .

**Abgabe:** 09.07.2003 in der Übung