Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. R. Braun

SS 2003
16.07.2003
Blatt 13

Übungen zur Funktionalanalysis

1. Sei S eine Menge, und sei H ein Hilbertraum, der ein Untervektorraum des Raums $\mathrm{Abb}(S, \mathbb{K}) = \{f : S \to \mathbb{K}\}$ ist. Eine Funktion $k : S \times S \to \mathbb{K}$ heißt *reproduzierender Kern* von H, wenn für alle $t \in S$ die Funktion $k_t : S \mapsto k(s,t)$ in H liegt und ferner für alle $f \in H$ gilt $f(t) = \langle f, k_t \rangle$.

   (a) Zeigen Sie: Wenn ein reproduzierender Kern existiert, so ist er eindeutig bestimmt.

   (b) Zeigen Sie: Ein reproduzierender Kern existiert genau dann, wenn alle Funktionale $f : t \mapsto f(t)$, $t \in S$, stetig sind.

   (c) Zeigen Sie: Wenn k ein reproduzierender Kern ist, dann liegt die lineare Hülle der k_t, $t \in S$, dicht in H.

   (d) Bestimmen Sie den reproduzierenden Kern für den zweidimensionalen Unterraum H von $L^2[0,1]$, der aus allen Funktionen der Form $t \mapsto a + bt$ besteht.

2. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem Hilbertraum H. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

   (a) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$,

   (b) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ und die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen x.

   Hinweis: Man zeigt die Aussage mit einem einfachen Trick, der in der Vorlesung mehrfach implizit vorgekommen ist.

3. Es sei $\Omega =]-1, 1[$. Zeigen Sie:

   (a) Für $g \in C^1(\overline{\Omega})$ und $f \in W^1(\Omega)$ ist $gf \in W^1(\Omega)$. Ferner ist $g'f + gf'$ die schwache Ableitung von gf.

   (b) Für $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$ und $f \in W^m(\Omega)$ ist $gf \in W^m(\Omega)$.

Abgabe: 23.07.2003 in der Übung