Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. R. Braun

SS 2003
14.05.2003
Blatt 4

Übungen zur Funktionalanalysis

1. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Für $1 \leq p < \infty$ definiere
$$N_p = \left\{ f \colon \Omega \to \mathbb{K} \text{ messbar} \;\middle|\; \int_\Omega |f|^p \, d\mu = 0 \right\}.$$
Zeigen Sie $N_p = N_1$ für alle p.

2. Sei $E_1, E_2, \ldots$ eine Folge von Banachräumen, und es sei $1 \leq p < \infty$. Man setzt
$$\bigoplus\nolimits_p E_n = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^\infty E_n \;\middle|\; \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p < \infty \right\}$$
und versieht $\bigoplus_p E_n$ mit der Norm
$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p \right)^{1/p}.$$
Zeigen Sie:
   (a) $\bigoplus_p E_n$ ist ein Banachraum.
   (b) Für q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt
$$\left(\bigoplus\nolimits_p E_n \right)' = \bigoplus\nolimits_q E_n'.$$

3. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, sei $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ mit paarweise disjunkten, messbaren Ω_j. Zeigen Sie
$$L^p(\Omega) = \bigoplus\nolimits_p L^p(\Omega_j).$$

4. Komplettieren Sie den Beweis von Satz 5.7 der Vorlesung.
Genauer: Es sei bereits bewiesen, dass $L^p(\Omega)' \cong L^q(\Omega)$ falls $\mu(\Omega) < \infty$, $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Folgern Sie daraus die entsprechende Aussage für den Fall, dass Ω σ-endlich ist.
Hinweis: Verwenden Sie die beiden vorangehenden Aufgaben.

Abgabe: 21.05.2003 in der Übung