Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. R. Braun

SS 2003
21.05.2003
Blatt 5

Übungen zur Funktionalanalysis

1. Ein normierter Raum E heißt *strikt konvex*, wenn gilt: Sind $x, y \in E$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ verschieden gewählt, so folgt $\|x + y\| < 2$.

   Zeigen Sie, dass die Fortsetzung Y im Korollar 6.7 zum Satz von Hahn-Banach eindeutig ist, falls E' strikt konvex ist.

   Bemerkung: Man kann durch Inspektion des Beweises der Minkowskischen Ungleichung zeigen, dass ℓ^p für $1 < p < \infty$ strikt konvex ist.

2. Sei E ein normierter Raum, und sei $F \subset E$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Zeigen Sei

$$(E/F)' \cong F^{\perp},$$
$$F' \cong E'/F^{\perp}.$$

3. Beweisen Sie den strikten Trennungssatz 6.22 für den Fall endlich-dimensionaler normierter Räume ohne Rückgriff auf das Zornsche Lemma.

4. Verwenden Sie die kanonische Einbettung $J\colon E \to E''$, um folgenden Satz zu zeigen:

   Zu jedem normierten Raum E existiert ein Banachraum $\widehat{E}$, so dass E in $\widehat{E}$ dicht ist und die Normen von E und $\widehat{E}$ auf E übereinstimmen.

Abgabe: 28.05.2003 in der Übung