Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. R. Braun

SS 2003
11.06.2003
Blatt 8

Übungen zur Funktionalanalysis

1. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, so dass für jedes $y \in c_0$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann $y \in \ell^1$.

2. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in C([0,1]^2)$ der Volterrasche Integraloperator
$$T_k\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (T_k f)(s) = \int_0^s k(s,t) f(t)\,dt,$$
kompakt ist.

   Hinweis: Der Satz von Arzelà-Ascoli kann verwendet werden.

3. Sei $1 \le p < \infty$, und sei $z \in \ell^\infty$. Betrachten Sie den Operator
$$T_z\colon \ell^p \to \ell^p, \quad x \mapsto (z_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Zeigen Sie, dass T_z genau dann kompakt ist, wenn $z \in c_0$.

   Hinweis: Diagonalfolgenargument.

4. $C^1[0,1]$ trage wie üblich die Norm $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $(C^1[0,1], \|\cdot\|) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ kompakt ist.

Abgabe: 18.06.2003 in der Übung