

SPEZIELLE THEMEN DER ANALYSIS: FUNKTIONALANALYSIS

VORLESUNG IM WINTERSEMESTER 2010/11

RÜDIGER W. BRAUN

INHALTSVERZEICHNIS

1. Normierte Räume und stetige lineare Abbildungen	3
2. Banachräume	5
3. Hilberträume	7
4. Die wichtigsten Sätze der Integrationstheorie	9
5. L^p -Räume	11
6. Orthonormalsysteme	12
7. Dualräume	16
8. Der Satz von Hahn-Banach	18
9. Schwache Konvergenz und Reflexivität	21
10. Der Bairesche Kategoriensatz	22
11. Transponierte Operatoren	27
12. Kompakte Operatoren	29
13. Spektraltheorie für kompakte Operatoren	30
14. Beschränkte selbstadjungierte Operatoren	33
15. Spektraltheorie für kompakte Operatoren auf Hilberträumen	34
16. Sobolevräume	35
17. Die Fouriertransformation	36
18. Die Einbettungssätze von Sobolev und Rellich	38
19. Unbeschränkte Operatoren zwischen Hilberträumen	40
20. Die Friedrichssche Erweiterung	43
Literatur	45

1. NORMIERTE RÄUME UND STETIGE LINEARE ABBILDUNGEN

1.1. *Motivation.* Gemeinsame Schlussweisen der Analysis herausarbeiten, Beispiel: Lösbarkeit von Integralgleichungen.

Überall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Null ist keine natürliche Zahl.

1.2. **Definition.** Sei E ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine *Norm* auf E ist eine Funktion $\|\cdot\|: E \rightarrow [0, \infty[$ mit den folgenden Eigenschaften:

(N1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

(N2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in E$ (Dreiecksungleichung).

(N3) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Ein *normierter Raum* $(E, \|\cdot\|)$ ist ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einer Norm.

1.3. *Bemerkung.* Auf einem normierten Raum wird durch

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik definiert. Daher sind alle Begriffe, die für metrische Räume erklärt sind, auch für normierte Räume definiert. Ich wiederhole die wichtigsten:

Grenzwert: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass $\|x_n - x\| < \epsilon$ für alle $n > N$.

Cauchy-Folge: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ für alle $n, m > N$.

ϵ -Umgebung: Für $\epsilon > 0$ bezeichnet man die Menge

$$U_\epsilon(x) = \{y \in E \mid \|x - y\| < \epsilon\}$$

als ϵ -Umgebung von x .

Umgebung: Eine Menge U heißt *Umgebung* eines Punktes $x \in E$, wenn U eine ϵ -Umgebung von x umfasst.

Ist $F \subset E$ ein linearer Unterraum eines normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$ und ist $\|\cdot\|_F$ die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf F , so ist $(F, \|\cdot\|_F)$ ebenfalls ein normierter Raum.

1.4. *Beispiele.* (a) Der $\mathbb{K}^n$ sei versehen mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Dann ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum.

(b) Allgemeiner sei M eine nicht-leere Menge. Dann ist

$$l^\infty(M) = \{(x_n)_{n \in M} \mid \sup_{n \in M} |x_n| < \infty\},$$

versehen mit der Norm

$$\|(x_n)_{n \in M}\|_\infty = \sup_{n \in M} |x_n|,$$

ein normierter Raum.

- (c) Mit c bezeichnet man den Unterraum von $l^\infty(\mathbb{N})$, der aus den konvergenten Folgen besteht. Mit c_0 bezeichnet man den Unterraum von c , der aus den Nullfolgen besteht.
- (d) Sei X ein kompakter topologischer Raum (also beispielsweise eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{K}^n$). Dann bezeichnet

$$C(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

den Raum der stetigen Funktionen auf X . Wegen der Kompaktheit von X ist $C(X)$ ein Unterraum von $l^\infty(X)$. Wir versehen ihn mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

- (e) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Ferner gebe es eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\overline{G} = K$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$C^n(K) = \{f \in C(G) \mid \text{alle partiellen Ableitungen von } f \text{ bis einschließlich zur Ordnung } n \text{ existieren und sind gleichmäßig stetig}\}.$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass jede gleichmäßig stetige Funktion auf G stetig auf den Abschluss K von G fortgesetzt werden kann. Also in Wirklichkeit $f \in C(K)$. Es besitzt sogar jede Ableitung $f^{(\alpha)}$ mit $|\alpha| \leq n$ eine stetige Fortsetzung f_α auf K (ohne dass wir uns dem schwierigen Problem gestellt hätten, in Randpunkten eine Ableitung zu erklären). Wir versehen $C^n(K)$ mit der Norm

$$\|f\|_n = \max_{\alpha \leq n} \sup_{x \in K} |f_\alpha(x)| = \max_{\alpha \leq n} \sup_{x \in G} |f^{(\alpha)}(x)|.$$

1.5. Satz. Seien E und F normierte Räume, und sei $A: E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung. Es sind äquivalent:

- (a) A ist stetig.
 (b) A ist gleichmäßig stetig.
 (c) Zu jeder Nullumgebung U in F existiert eine Nullumgebung V in E mit $A(V) \subset U$.
 (d) Es gibt $C > 0$ mit $\|Ax\| \leq C\|x\|$ für alle $x \in E$.

1.6. Definition. Bei linearen Abbildungen zwischen normierten Räumen werden die Worte „stetig“ und „beschränkt“ synonym verwendet. Stetige lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen werden auch als beschränkte *Operatoren* bezeichnet. Für einen beschränkten Operator $A: E \rightarrow F$ definieren wir

$$(1.1) \quad \|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}.$$

Wegen Satz 1.5 ist das Supremum endlich. Alle stetigen linearen Abbildungen von E nach F bilden einen Vektorraum, den wir mit $L(E, F)$ bezeichnen. Man sieht sofort, dass $\|\cdot\|$ aus (1.1) eine Norm auf $L(E, F)$ ist. Sie heißt *Operatornorm*.

Spezialfälle mit eigener Bezeichnung: $L(E) = L(E, E)$ und $E' = L(E, \mathbb{K})$. Die Elemente von E' heißen stetige *Linearformen* oder *Funktionale*.

1.7. **Satz.** Sei E ein endlich-dimensionaler normierter Raum, und sei F ein beliebiger normierter Raum. Dann ist jede lineare Abbildung $A: E \rightarrow F$ stetig.

1.8. **Bemerkung.** (a) Wenn umgekehrt F endlich-dimensional und E beliebig ist, dann gibt es sehr wohl unstetige lineare Abbildungen von E nach F . Solche Abbildungen kann man mit Hilfe einer Vektorraumbasis von E konstruieren.

(b) Die Bestimmung der Operatornorm von A ist meist auch im endlich-dimensionalen Fall trickreich. Derartige Fragen führen in das Gebiet der Banachraumgeometrie.

1.9. **Definition.** Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E heißen *äquivalent*, wenn es $C > 0$ gibt mit

$$\frac{1}{C} \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq C \|\cdot\|_1.$$

1.10. **Korollar.** Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.

1.11. **Definition.** Eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen heißt *Isomorphismus*, wenn sie bijektiv und stetig ist und auch ihre Inverse stetig ist.

Bemerkung. Ein Isomorphismus normierter Räume ist also ein Isomorphismus der zu Grunde liegenden Vektorräume, der gleichzeitig ein Homöomorphismus der zugehörigen metrischen Räume ist.

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum E sind genau dann äquivalent, wenn $\text{id}: (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ ein Isomorphismus ist.

1.12. **Beispiel.** Es sei $K: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ stetig. Definiere

$$(Tf)(s) = \int_0^1 K(s, t)f(t)dt, \quad f \in C[0, 1], 0 \leq s \leq 1.$$

$T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ist ein stetiger Operator. Es ist ein *Fredholmscher Integraloperator* mit Kern K .

2. BANACHRÄUME

2.1. **Definition.** Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum.

2.2. **Beispiele.** (a) Der $\mathbb{K}^n$ ist ein Banachraum.

(b) Für jede Menge M ist $\ell^\infty(M)$ ein Banachraum.

Für weitere Beispiele ist der folgende Satz interessant.

2.3. **Satz.** (a) Ist E ein Banachraum und F ein abgeschlossener Untervektorraum von E , so ist F ein Banachraum.

(b) Ist E ein normierter Raum und F ein Untervektorraum von E , der ein Banachraum ist, so ist F abgeschlossen in E .

2.4. *Bemerkung.* Der Kern eines stetigen linearen Operators ist abgeschlossen (klar). Diese Bemerkung liefert gelegentlich einen einfachen Nachweis der Bedingung aus Teil (a) des Satzes.

2.5. *Beispiele.* (a) c und c_0 sind Banachräume.

(b) Sei X ein kompakter topologischer Raum. Dann ist $C(X)$ ein Banachraum.

Das ist klar, weil der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen wieder stetig ist.

(c) Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt von der Form $K = \overline{G}$ für eine offene Menge G . Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $C^m(K)$ ein Banachraum.

2.6. *Satz.* Sei E ein normierter Raum, sei F ein abgeschlossener Unterraum von E . Dann wird auf E/F wie folgt eine Norm erklärt

$$\|x + F\| = \inf_{w \in F} \|x + w\|.$$

Falls E vollständig ist, so auch E/F .

2.7. *Satz (Homomorphiesatz).* E und G seien normierte Räume, und F sei ein abgeschlossener Unterraum von E . Die Quotientenabbildung werde mit $\pi: E \rightarrow E/F$ bezeichnet. Für $\varphi \in L(E, G)$ gelte $F \subset \ker \varphi$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $\psi \in L(E/F, G)$ mit $\varphi = \psi \circ \pi$. Es gilt $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$.

2.8. *Definition.* Für $1 \leq p < \infty$ definiere

$$\ell^p = \{(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p < \infty\}.$$

Eine kleine Rechnung, deren Trick in der Abschätzung $|x + y| \leq 2 \max(|x|, |y|)$ besteht, zeigt, dass ℓ^p ein Vektorraum ist. Für $t \in \ell^p$ definieren wir

$$\|t\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \right)^{1/p}.$$

Um zu zeigen, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm ist, sind Vorbereitungen erforderlich.

2.9. *Lemma.* Für alle $\sigma, \tau \geq 0$ und $0 < r < 1$ gilt

$$(2.1) \quad \sigma^r \tau^{1-r} \leq r\sigma + (1-r)\tau.$$

2.10. *Satz (Höldersche Ungleichung).* Sei $1 < p < \infty$, sei q bestimmt durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(Dann auch $1 < q < \infty$.) Für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^q$ ist $xy := (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in ℓ^1 , und es gilt

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Die Dreiecksungleichung für ℓ^p -Räume hat einen eigenen Namen.

2.11. **Satz (Minkowskische Ungleichung).** Für $x, y \in \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, gilt

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Damit ist endlich klar, dass ℓ^p ein normierter Raum ist.

Bemerkung. Für $p = 2$ gilt auch $q = 2$. In diesem Fall heißt die Höldersche Ungleichung üblicherweise Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

2.12. **Satz.** Für $1 \leq p < \infty$ ist ℓ^p ein Banachraum.

Bemerkung. Auch für $0 < p < 1$ ist ℓ^p ein Vektorraum. Allerdings ist $\|\cdot\|_p$ dann keine Norm mehr, sondern erfüllt statt der Dreiecksungleichung nur noch die schwächere Bedingung

$$\|x + y\|_p \leq C(\|x\|_p + \|y\|_p)$$

für ein von x und y unabhängiges $C > 1$. Auch für $p < 1$ kann $\|\cdot\|_p$ benutzen, um eine Metrik auf ℓ^p zu erklären. Dieser Raum hat aber sehr viel schlechtere Eigenschaften als ein normierter Raum.

2.13. **Satz.** Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gibt es einen Banachraum $(\hat{E}, \|\cdot\|_1)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $E \subset \hat{E}$ und $\|x\| = \|x\|_1$ für alle $x \in E$.
- (b) Zu jedem Banachraum F und jeder stetigen linearen Abbildung $A: E \rightarrow F$ existiert genau eine stetige lineare Abbildung $\hat{A}: \hat{E} \rightarrow F$ mit $\hat{A}|_E = A$.
 $\hat{E}$ ist die vollständige Hülle von E .

3. HILBERTRÄUME

3.1. **Definition.** Ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum E ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (S1) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y, z \in E$,
- (S2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ für alle $x, y \in E$,
- (S3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in E$ und $\langle x, x \rangle = 0$ genau für $x = 0$.

Das Paar $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bezeichnet man als *Prähilbertraum*.

3.2. **Lemma.** Für einen Prähilbertraum $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ definieren wir $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Dann gelten

- (a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ für alle $x, y \in E$,
- (b) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ für alle $x, y \in E$ (Cauchy-Schwarz Ungleichung),
- (c) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf E ,
- (d) für jedes $y \in E$ ist $\Phi(y): x \mapsto \langle x, y \rangle$ eine stetige Linearform auf E .

Bemerkung. Der Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung zeigt außerdem, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

3.3. **Lemma.** In jedem Prähilbertraum gelten die folgenden Identitäten:

- (a) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Parallelogrammgleichung),
 (b) (Polarisationsgleichungen)

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2), \quad \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

3.4. Definition. Durch die Definition $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ wird ein Prähilbertraum E zu einem normierten Raum. Falls der Prähilbertraum E vollständig ist, so bezeichnet man ihn als *Hilbertraum*.

- 3.5. Beispiele.** (a) ℓ^2 ist ein Hilbertraum. Speziell ist $\mathbb{K}^n$, versehen mit der euklidischen Norm $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ ein Hilbertraum.
 (b) Jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraums ist ein Hilbertraum.
 (c) Die Vervollständigung eines Prähilbertraums, aufgefasst als normierter Raum, ist ein Hilbertraum, wenn man das Skalarprodukt durch die Polarisationsgleichung erklärt.
 (d) Beispielsweise besitzt $C[0, 1]$ das folgende Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Der zugehörige Hilbertraum ist $L^2[0, 1]$.

- (e) Für $m \in \mathbb{N}$ besitzt der $C^m[0, 1]$ das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^m \int_0^1 f^{(j)}(x) \overline{g^{(j)}(x)} dx.$$

Seine Vervollständigung ist der Sobolevraum $W_m([0, 1])$, den wir später noch ausführlicher betrachten.

3.6. Lemma. Sei $A \neq \emptyset$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines Hilbertraums E . Dann existiert zu jedem $x \in E$ ein eindeutig bestimmtes $y \in A$ mit $\|x - y\| = \text{dist}(x, A)$.

3.7. Definition. Zwei Elemente x und y eines Prähilbertraums E heißen *orthogonal*, falls $\langle x, y \rangle = 0$. Man schreibt dann $x \perp y$. Falls F ein Unterraum von E ist, so bezeichnet man

$$F^\perp = \{x \in E \mid x \perp y \text{ für alle } y \in F\}$$

als das *orthogonale Komplement* von F in E .

- 3.8. Bemerkungen.** (a) Das orthogonale Komplement ist offenbar abgeschlossen.
 (b) Für orthogonale Elemente $x, y \in E$ gilt der Satz des Pythagoras

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

3.9. Lemma. Sei F ein Unterraum eines Prähilbertraums E , und seien $x \in E$ und $y \in F$. Dann sind äquivalent

- (a) $\|x - y\| = \text{dist}(x, F)$,
- (b) $x - y \in F^\perp$.

3.10. Definition. Sei E ein Prähilbertraum. Zwei Unterräume G und H von E heißen *orthogonal*, wenn $x \perp y$ für $x \in G$ und $y \in H$. Man schreibt dann $G \perp H$.

Eine Abbildung $P \in L(E)$ heißt *Projektion*, wenn $P^2 = P$. (Der Begriff der Projektion macht auch für normierte Räume Sinn.) Eine Projektion heißt *orthogonal*, wenn $\text{Bild } P \perp \ker P$.

3.11. Bemerkungen. (a) Falls $G \perp H$, so folgt $G \cap H = \{0\}$.

- (b) Sei $P \neq 0$ eine orthogonale Projektion in einem Prähilbertraum E . Dann gilt $\|P\| = 1$, denn aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$\|Px\|^2 \leq \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in E.$$

Dieselbe Rechnung zeigt, dass eine lineare Abbildung $P: E \rightarrow E$ mit $P^2 = P$ und $\text{Bild } P \perp \ker P$ bereits stetig ist.

- (c) Aus dem vorstehenden Lemma folgt ferner $\|x - Px\| = \text{dist}(x, \text{Bild } P)$.

Sei E ein normierter Raum. Ein Unterraum $F \subset E$ heißt *komplementiert*, wenn es eine Projektion $P \in L(E)$ mit $\text{Bild } P = F$ gibt.

3.12. Lemma. Seien E ein Hilbertraum und $F \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist F komplementiert.

3.13. Bemerkung. Wir haben soeben gesehen, dass jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraums komplementiert ist. Lindenstrauss und Tzafriri haben 1971 gezeigt, dass umgekehrt jeder Banachraum, dessen sämtliche abgeschlossenen Unterräume komplementiert sind, isomorph zu einem Hilbertraum ist.

3.14. Korollar. Seien E ein Hilbertraum und $F \subset E$ ein Unterraum. Dann gelten $\overline{F}^\perp = F^\perp$ und $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.

3.15. Theorem (Rieszscher Darstellungssatz für Linearformen auf Hilberträumen). Seien E ein Hilbertraum und $y \in E'$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $\eta \in E$ mit

$$y(x) = \langle x, \eta \rangle \quad \text{für alle } x \in E.$$

Für dieses η gilt $\|\eta\| = \|y\|$.

4. DIE WICHTIGSTEN SÄTZE DER INTEGRATIONSTHEORIE

Das Lebesguemaß ist vollständig, das heißt jede Teilmenge einer Nullmenge ist messbar.

4.1. Theorem (Satz von Fubini). Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ eine messbare Funktion, und es bezeichne λ^n das n -dimensionale Lebesguemaß.

- (a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ ist $t \mapsto f(s, t)$ messbar, und für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $s \mapsto f(s, t)$ messbar. Ferner sind $s \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(s, t)| d\lambda(t)$ und $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(s, t)| d\lambda(s)$ messbar (mit Werten in $[0, \infty]$).

- (b) Falls

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(s, t)| d\lambda(s) d\lambda(t) < \infty,$$

so ist f integrierbar.

- (c) Ist f integrierbar, so ist $f_t: s \mapsto f(s, t)$ für fast alle t integrierbar,

$$h: t \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f_t d\lambda, & \text{falls } f_t \text{ integrierbar,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}} h d\lambda.$$

Es ist klar, wie höherdimensionale Versionen des Satzes von Fubini aussehen.

4.2. Theorem (Lemma von Fatou). *Es sei μ ein Maß auf T . Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n: T \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Der punktweise Grenzwert $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ existiere. Dann ist f messbar, und es gilt*

$$\int_T f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n d\mu.$$

4.3. Beispiel. Setze

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - |t - n|, & \text{falls } n - 1 \leq t \leq n + 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1$ für alle n , aber $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$.

4.4. Theorem (Satz von Beppo Levi, Satz über monotone Konvergenz). *Es sei μ ein Maß auf T . Seien $f_1, f_2, \dots: T \rightarrow [0, \infty]$ messbar mit $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$. Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ punktweise. Dann ist f messbar mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n d\mu = \int_T f d\mu \in [0, \infty].$$

4.5. Theorem (Konvergenzsatz von Lebesgue, Satz von der majorisierten Konvergenz). *Es sei μ ein vollständiges Maß auf T . Seien $f_1, f_2, \dots: T \rightarrow \mathbb{K}$ integrierbar mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ fast überall. Es existiere ferner eine integrierbare Funktion g , so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|f_n| \leq g$ fast überall gilt. Dann ist f integrierbar, und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n d\mu = \int_T f d\mu.$$

5. L^p -RÄUME

L^p -Räume sind die Versionen der ℓ^p -Räume für Funktionen statt Folgen. Der Gang der Handlung ist derselbe wie bei ℓ^p , allerdings kommen noch maßtheoretische Schwierigkeiten hinzu. Man könnte sogar die ℓ^p -Räume als Spezialfälle der L^p -Räume behandeln, indem man das Zählmaß benutzt.

5.1. Definition. Sei μ ein Maß auf T , sei $1 \leq p < \infty$. Dann

$$\mathcal{L}^p(T) = \left\{ f: T \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar} \mid \int_T |f|^p < \infty \right\}, \quad \|f\|_p^* = \left(\int_T |f|^p \right)^{1/p}.$$

Dann ist $\mathcal{L}^p(T)$ ein Vektorraum, und $\|f\|_p^*$ erfüllt (N1) und (N2). Falls das Maß nichtleere Nullmengen besitzt, so erfüllt $\|f\|_p^*$ aber nicht (N3), ist also nicht definit. Die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung beweist man wie bei den ℓ^p -Räumen.

5.2. Satz (Höldersche Ungleichung). Sei $1 < p < \infty$, sei q bestimmt durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Für $f \in \mathcal{L}^p(T)$ und $g \in \mathcal{L}^q(T)$ gelten $fg \in \mathcal{L}^1(T)$ und

$$\|fg\|_1^* \leq \|f\|_p^* \|g\|_q^*.$$

Bemerkung. Für $p = 2$ gilt auch $q = 2$. In diesem Fall heißt die Höldersche Ungleichung üblicherweise Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

5.3. Satz (Minkowskische Ungleichung). Für $f, g \in \mathcal{L}^p$, $1 \leq p < \infty$, gilt

$$\|f + g\|_p^* \leq \|f\|_p^* + \|g\|_p^*.$$

5.4. Definition. Sei μ ein Maß auf T , und sei $1 \leq p < \infty$. Setze

$$N_p = \left\{ f: T \rightarrow \mathbb{K} \mid \int_T |f|^p = 0 \right\} = \left\{ f: T \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar} \mid \mu(\{x \mid f(x) \neq 0\}) = 0 \right\}.$$

Dann folgt für $f \in \mathcal{L}^p(T)$ und $g \in N_p$ aus der Minkowskischen Ungleichung

$$\|f + g\|_p^* \leq \|f\|_p^* + \|g\|_p^* = \|f\|_p^* \leq \|f + g\|_p^* + \|-g\|_p^* = \|f + g\|_p^*,$$

also $\|f + g\|_p^* = \|f\|_p^*$ für alle $g \in N$. Wir können daher definieren

$$L^p(T) = \mathcal{L}^p(T)/N_p \quad \|f\|_p = \|f\|_p^*.$$

5.5. Satz. Sei μ ein Maß auf T . Dann ist $L^p(T)$ ein Banachraum.

Bemerkung. Man kann auch den Raum $L^\infty(T)$ definieren. Da er in dieser Vorlesung voraussichtlich keine Rolle spielen wird, verzichte ich darauf.

5.6. Definition. Für $f \in C(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet man

$$\text{Supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}}$$

als *Träger* von f .

Der Vektorraum

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \text{Supp } f \text{ kompakt}\}.$$

heißt Raum der *Testfunktionen*.

Beachte, dass weder $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ noch $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ Banachräume sind.

5.7. Lemma. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit

- (a) $0 \leq \chi \leq 1$,
- (b) $\text{Supp } \chi \subset [-1 - \epsilon, 1 + \epsilon]^d$,
- (c) $\chi(x) = 1$ für alle $x \in [-1, 1]^d$.

5.8. Satz. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, \lambda^d)$. (Hier bezeichnet λ^d das d -dimensionale Lebesguemaß.)

6. ORTHONORMALSYSTEME

6.1. Definition. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Banachraum heißt (*Schauder*)-*Basis*, wenn es zu jedem $x \in E$ eine eindeutig bestimmte Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gibt, so dass $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$.

Bemerkung. Vektorraumbasen bezeichnet man als *Hamel-Basen*. Sie spielen bei Banachräumen keine große Rolle.

6.2. Definition. Sei E ein Prähilbertraum. Eine Teilmenge $(e_i)_{i \in I}$ heißt *Orthogonalsystem* in E , falls $e_i \neq 0$ für alle $i \in I$ und $e_i \perp e_j$ für $i \neq j$. Falls zusätzlich noch $\|e_i\|_i = 1$ für alle $i \in I$, so spricht man von einem *Orthonormalsystem*. Ein Orthonormalsystem heißt *vollständig*, wenn seine lineare Hülle dicht ist. Ein vollständiges Orthonormalsystem wird auch als *Orthonormalbasis* bezeichnet.

6.3. Bemerkung. Sei $(e_i)_{i \in M}$ ein endliches Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum E . Dann wird durch $P: x \mapsto \sum_{i \in M} \langle x, e_i \rangle e_i$ eine orthogonale Projektion mit Bild $P = \text{LH}\{e_i \mid i \in M\}$ gegeben. Für jedes Tupel $(\lambda_i)_{i \in M}$ gilt

$$\left\| \sum_{i \in M} \lambda_i e_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i \in M} \lambda_i e_i, \sum_{j \in M} \lambda_j e_j \right\rangle = \sum_{i, j \in M} \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i \in M} |\lambda_i|^2.$$

Damit ist gezeigt, dass jedes (nicht notwendig endliche) Orthonormalsystem linear unabhängig ist. Da die Projektion P orthogonal ist, folgt ferner für endliches M

$$\sum_{i \in M} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|Px\|^2 \leq \|P\|^2 \|x\|^2 = \|x\|^2.$$

Für $I = \mathbb{N}$ oder endliches I folgt hieraus sofort die *Besselsche Ungleichung*:

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in E.$$

6.4. Satz. Sei E ein Prähilbertraum, sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in E . Dann sind äquivalent

- (a) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist vollständig,
- (b) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Schauderbasis,
- (c) für jedes $x \in E$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

6.5. Korollar. Sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum E . Dann ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann vollständig, wenn es kein $x \in E \setminus \{0\}$ gibt mit $x \perp e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

6.6. Satz (Gram-Schmidt Orthogonalisierung). Sei E ein Prähilbertraum, sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge linear unabhängiger Elemente von E . Dann existiert ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\text{LH}\{x_1, \dots, x_n\} = \text{LH}\{e_1, \dots, e_n\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

6.7. Definition. Ein Banachraum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

- 6.8. Beispiel.**
- (a) Für $1 \leq p < \infty$ ist der ℓ^p separabel. Der c_0 ist separabel. Der ℓ^∞ ist nicht separabel.
 - (b) Offenbar impliziert die Existenz einer Schauderbasis die Separabilität.
 - (c) Enflo konstruierte in einem 1973 veröffentlichten Artikel einen separablen Banachraum ohne Basis.

6.9. Satz. Sei E ein separabler Prähilbertraum. Dann besitzt E ein vollständiges Orthonormalsystem.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass jeder Hilbertraum ein vollständiges Orthonormalsystem besitzt. Man muss dazu Reihen mit überabzählbaren Indexmengen einführen. Dies ist nicht weiter schwierig.

6.10. Korollar. Jeder unendlich-dimensionale, separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zum ℓ^2 .

Beweis. Sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von E . Setze

$$T: E \rightarrow \ell^2, \quad x \mapsto (\langle x, e_j \rangle)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt, dass das Bild von T in der Tat im ℓ^2 liegt und dass T eine Isometrie auf ihr Bild ist. Andererseits rechnet man sofort nach, dass für $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ der Vektor $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$ in E liegt und ein Urbild unter T ist. $\square$

6.11. Definition. Ein Unterraum E eines normierten Raums F heißt *Hyperebene*, wenn er der Kern eines stetigen, linearen, nicht-trivialen Funktional ist.

6.12. Korollar. *Jeder unendlich-dimensionale separable Hilbertraum ist isomorph zu allen seinen Hyperebenen.*

6.13. Bemerkung. Diese Aussage gilt in allen unendlich-dimensionalen Hilberträumen. Tomothy Gowers erhielt 1998 die Fields-Medaille unter anderem für das folgende Ergebnis:

Es gibt einen unendlich-dimensionalen Banachraum, der zu keiner seiner Hyperebenen isomorph ist.

Die konkrete Bestimmung eines Isomorphismus zwischen einem gegebenen separablen Hilbertraum E und dem ℓ^2 ist nicht immer einfach. Man geht meist von einer bekannten dichten, linear unabhängigen Folge in E aus. Wir werden nun die Sätze von Weierstraß und von Stone-Weierstraß zeigen, die häufig benutzt werden können, um zu zeigen, dass in einem Funktionenraum die Polynome einen dichten Unterraum bilden.

6.14. Definition. Sei X ein kompakter topologischer Raum. Ein Unterraum $A \subset C(X, \mathbb{R})$ ist eine *Unteralgebra*, wenn A die konstanten Funktionen und zu je zwei Funktionen $f, g \in A$ deren Produkt fg enthält.

6.15. Lemma. *Seien X ein kompakter topologischer Raum und $A \subset C(X, \mathbb{R})$ eine abgeschlossene Unteralgebra. Falls $f \in A$ keine negativen Funktionswerte annimmt, so liegt $\sqrt{f}$ in A .*

6.16. Satz. *Sei X ein kompakter topologischer Raum, und sei A eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(X, \mathbb{R})$. Falls A die Punkte von X trennt, d. h. falls es zu je zwei $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt, so gilt $A = C(X, \mathbb{R})$.*

6.17. Theorem (Satz von Stone-Weierstraß). *Seien X ein kompakter topologischer Raum und A eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(X, \mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften*

- (a) A trennt die Punkte von X ,
- (b) mit f liegt auch $\bar{f}$ in A .

Dann $A = C(X, \mathbb{C})$.

6.18. Theorem (Weierstraßscher Approximationssatz). *Sei $X \neq \emptyset$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann kann jede stetige Funktion auf X gleichmäßig durch Polynome approximiert werden.*

6.19. Korollar. *Sei λ das Lebesguemaß auf $[0, 1]$. Dann sind die Polynomfunktionen dicht in $L^p([0, 1], \lambda)$ für $1 \leq p < \infty$.*

6.20. *Beispiel.* Sei $E = L^2([0, 2\pi])$, versehen mit dem Lebesguemaß. Die Funktionen

$$e_k: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2([0, 2\pi])$.

Die Orthonormalität rechnet man sofort nach. Wir zeigen die Vollständigkeit. Sei S^1 der Einheitskreis. Betrachte

$$T: C(S^1) \rightarrow L^2[0, 2\pi], \quad f \mapsto g \text{ mit } g(t) = f(e^{it}).$$

Das Bild von T ist dicht in $L^2[0, 2\pi]$. Dies folgt leicht aus dem Satz, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ ist. Mit dem Satz von Stone-Weierstraß sieht man aber sofort, dass die Polynome in z und $\bar{z}$ dicht in $C(S^1)$ sind. Wegen $\bar{z} = 1/z$ für $z \in S^1$ folgt die Behauptung.

6.21. *Beispiel.* Sei $E = L^2([0, 2\pi])$, versehen mit dem Lebesguemaß. Die Funktionen

$$\begin{aligned} e_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ e_k(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt), & k \in \mathbb{N}, \\ e_k(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt), & -k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2([0, 2\pi])$.

Die Orthonormalität rechnet man sofort nach. Die Vollständigkeit folgt aus dem vorstehenden Beispiel.

6.22. *Bemerkung.* Für ein $f \in L^2([0, 2\pi])$ und $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine der beiden zuletzt vorgestellten Orthonormalbasen bezeichnet man die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$$

als *Fourierreihe* von f . Es ist sofort klar, dass die Fourierreihe in $L^2([0, 2\pi])$ konvergiert. Eine ausführliche Behandlung der Fourierreihen bietet Körner [4].

Ich gebe noch zwei vollständige Orthonormalsysteme ohne Beweis an.

6.23. *Beispiel.* Die *Legendre-Polynome* sind definiert als

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sie bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2[-1, 1]$.

6.24. *Beispiel.* Die *Hermite-Polynome* sind definiert als

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die *Hermite-Funktionen* sind definiert als

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{2^n n!}} e^{-x^2/2} h_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Hermite-Funktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$.

7. DUALRÄUME

7.1. Satz. *Sei E ein normierter Raum. Dann ist sein Dualraum E' ein Banachraum.*

Dieser Satz ist ein Spezialfall des folgenden.

7.2. Satz. *Seien E ein normierter und F ein Banachraum. Dann ist $L(E, F)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L(E, F)$. Dann ist für jedes $x \in E$ die Folge $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in F , besitzt also einen Grenzwert $T(x)$. Der hierdurch definierte Operator T ist jedenfalls linear. Zeige

$$T \in L(E, F), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T.$$

Der Beweis des zweiten Teils dieser Behauptung zeigt wie immer auch den ersten. Sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ falls $n, m > N$. Fixiere $x \in E \setminus \{0\}$. Dann existiert $m > N$, so dass $\|T_m x - T x\| < \epsilon \|x\|$. Daraus folgt für beliebiges $n > N$

$$\|T_n x - T x\| \leq \|T_n x - T_m x\| + \|T_m x - T x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| + \epsilon \|x\| \leq 2\epsilon \|x\|.$$

Damit ist gezeigt, dass $\|T_n - T\| \leq 2\epsilon$ für alle $n > N$. □

7.3. Satz. *Für p mit $1 \leq p < \infty$ wähle q mit $1 < q \leq \infty$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $(\ell^p)' = \ell^q$.*

Genauer gilt folgendes: Die Abbildung

$$T: \ell^q \rightarrow (\ell^p)', \quad (Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Wir zeigen nur den Fall $p > 1$. Der Beweis des Falles $p = 1$ verläuft ähnlich.

Aus der Hölderschen Ungleichung folgt, dass $\sum_{m=1}^{\infty} x_m y_m$ tatsächlich konvergiert und dass

$$|(Tx)(y)| \leq \|x\|_q \|y\|_p.$$

Da Tx offenbar linear ist, ist damit gezeigt, dass $Tx \in (\ell^p)'$ und dass für seine Operatornorm gilt $\|Tx\| \leq \|x\|_q$. Daraus folgt wiederum, dass T wohldefiniert ist und für seine Operatornorm gilt $\|T\| \leq 1$.

Wir konstruieren jetzt die Inverse S von T . Sei dazu e_m der Vektor in ℓ^q , der in der m -ten Komponente eine 1 und sonst den Wert 0 hat. Setze

$$S: (\ell^p)' \rightarrow \ell^q, \quad f \mapsto (f(e_m))_{m \in \mathbb{N}}.$$

Als erstes müssen wir zeigen, dass in der Tat $(f(e_m))_{m \in \mathbb{N}} \in \ell^q$. Dazu definieren wir uns hilfsweise

$$t_n = \begin{cases} |f(e_n)|^q / f(e_n), & \text{falls } f(e_n) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gelten für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^N |t_n|^p = \sum_{n=1}^N |f(e_n)|^{p(q-1)} = \sum_{n=1}^N |f(e_n)|^q$$

und

$$\sum_{n=1}^N |f(e_n)|^q = \sum_{n=1}^N t_n f(e_n) = f\left(\sum_{n=1}^N t_n e_n\right) \leq \|f\| \left(\sum_{n=1}^N |t_n|^p\right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{n=1}^N |f(e_n)|^q\right)^{1/p}.$$

Daraus folgt nach Division durch $\left(\sum_{n=1}^N |f(e_n)|^q\right)^{1/p}$

$$\left(\sum_{n=1}^N |f(e_n)|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|.$$

Hieraus folgt durch Übergang $N \rightarrow \infty$, dass in der Tat $S(f) \in \ell^q$ und dass $\|S(f)\|_q \leq \|f\|$. Hieraus wiederum folgt $\|S\| \leq 1$. Es gilt $(S \circ T)(e_n) = S(y \mapsto y_n) = e_n$, also $S \circ T = \text{id}$, denn die endlichen Linearkombinationen der e_n sind dicht in ℓ^q . Umgekehrt gilt für $f \in (\ell^p)'$ und $x \in \ell^p$

$$(T \circ S)(f)(x) = T((f(e_n))_{n \in \mathbb{N}})(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n) x_n = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} e_n x_n\right) = f(x),$$

wobei man sich im vorletzten Schritt noch kurz überlegen muss, dass $\sum_{n=1}^N x_n e_n \rightarrow x$ für $N \rightarrow \infty$. Schließlich folgt die Isometrieeigenschaft von T (und S) aus

$$\|x\|_q = \|S \circ T x\|_q \leq \|T x\| \leq \|x\|_q. \quad \square$$

7.4. Satz. $c'_0 = \ell^1$ mit derselben Abbildung wie Satz 7.3.

Beweis. Übung. $\square$

Bemerkung. Man kann auch den Dualraum von ℓ^∞ angeben, er ist aber häßlich. Man findet diese Darstellung z.B. im ersten Band der Trilogie von Dunford und Schwartz [2].

Für $L^p(T)$ gilt das Analogon zu Satz 7.3. Wir beweisen es nicht.

7.5. **Satz.** Sei $1 < p < \infty$ und sei (Ω, Σ, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann definiert

$$T: L^q(\mu) \rightarrow (L^p(\mu))', \quad (Tg)(f) = \int_{\Omega} fg \, d\mu,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

8. DER SATZ VON HAHN-BANACH

8.1. **Definition.** Es sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Eine *Kette* in A ist eine total geordnete Teilmenge, also eine Teilmenge, in der je zwei Elemente vergleichbar sind.

8.2. **Satz (Zornsches Lemma).** Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete, nichtleere Menge, in der jede Kette eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt A ein maximales Element.

Das Zornsche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

8.3. **Definition.** Ein *sublineares Funktional* auf einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum E ist eine Funktion $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- (a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $\lambda \geq 0$, $x \in E$,
- (b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$.

8.4. **Beispiele.** (a) Jede Norm und sogar jede Halbnorm (d.h. (N1), (N2)) ist ein sublineares Funktional.

(b) Ein sublineares Funktional, das nicht von dieser Form ist, wird gegeben durch

$$p: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

8.5. **Beispiel.** Sei E ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, und sei p ein sublineares Funktional auf E . Sei F ein Unterraum von E und sei $y: F \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit

$$y(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in F.$$

Setze

$$\mathcal{Z} = \{(G, Y) \mid G \text{ Unterraum von } E \text{ mit } F \subset G, \\ Y: G \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear mit } Y|_F = y \text{ und } Y(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in G\}.$$

Auf $\mathcal{Z}$ definieren wir wie folgt eine (partielle) Ordnung

$$(G_1, Y_1) \prec (G_2, Y_2) \Leftrightarrow G_1 \subset G_2 \text{ und } Y_2|_{G_1} = Y_1.$$

Wir zeigen, dass jede Kette $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}$ ein maximales Element besitzt. Dazu definieren wir $G_0 \subset E$ und $Y_0: G_0 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$G_0 = \{x \in E \mid \text{es gibt } (G, Y) \in \mathcal{A} \text{ mit } x \in G\}, \\ Y_0(x) = Y(x), \text{ falls } x \in G \text{ für ein } (G, Y) \in \mathcal{A}.$$

Da $\mathcal{A}$ eine Kette ist, zeigt man leicht, dass G_0 ein Vektorraum und dass Y_0 wohldefiniert ist. Daher $(G_0, Y_0) \in \mathcal{Z}$. Es ist klar, dass (G_0, Y_0) eine obere Grenze für $\mathcal{A}$ ist. Aus dem Zornschen Lemma folgt, dass $(\mathcal{Z}, <)$ ein maximales Element $(G_{\max}, Y_{\max})$ besitzt.

8.6. Lemma. *Es seien E ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, p ein sublineares Funktional auf E , $G \subset E$ ein Unterraum und $Y: G \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit $Y(x) \leq p(x)$ für alle $x \in G$. Dann existiert für jedes $z \in E \setminus G$ eine lineare Abbildung $Y_1: H := \text{LH}(G \cup \{z\}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Y_1|_G = Y$ und $Y_1(x) \leq p(x)$ für alle $x \in H$.*

8.7. Theorem (Satz von Hahn-Banach). *Seien E ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, p ein sublineares Funktional auf E , $F \subset E$ ein Unterraum und $y: F \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $y(x) \leq p(x)$ für alle $x \in F$. Dann existiert ein lineares Funktional Y auf E mit $Y|_F = y$ und $Y(x) \leq p(x)$ für alle $x \in E$.*

8.8. Satz. *Sei E ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, sei p eine Seminorm auf E (d. h. p hat (N1) und (N2)), sei $F \subset E$ ein Unterraum, und sei $y: F \rightarrow \mathbb{K}$ linear mit $|y(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in F$. Dann existiert $Y: E \rightarrow \mathbb{K}$ linear mit $Y|_F = y$ und $|Y(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in E$.*

8.9. Korollar. *Sei E ein normierter $\mathbb{K}$ -Vektorraum, sei $F \subset E$ ein Unterraum, und sei $y \in F'$. Dann existiert $Y \in E'$ mit $Y|_F = y$ und $\|Y\| = \|y\|$.*

8.10. Korollar. *In jedem normierten Raum E existiert zu jedem $x \in E$, $x \neq 0$, ein $y \in E'$ mit*

$$\|y\| = 1 \text{ und } y(x) = \|x\|.$$

Speziell trennt E' die Punkte von E , d. h. zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in E$ existiert $y \in E'$ mit $y(x_1) \neq y(x_2)$.

8.11. Korollar. *In jedem normierten Raum gilt für jedes $x \in E$*

$$\|x\| = \max\{|y(x)| \mid y \in E', \|y\| = 1\}.$$

8.12. Definition. Es seien E ein normierter Raum und $F \subset E$ ein Unterraum. Der Raum

$$F^\perp = \{y \in E' \mid y(x) = 0 \text{ für alle } x \in F\}$$

heißt *Annihilator* von F in E' .

8.13. Korollar. *Seien E ein normierter Raum und $F \subset E$ ein Unterraum. Dann sind äquivalent*

- (a) F ist dicht in E ,
- (b) $F^\perp = \{0\}$.

8.14. Beispiel. Betrachte

$$y: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Dann besitzt y eine lineare Fortsetzung $Y: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(8.1) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq Y(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Speziell $Y \in (\ell^\infty)'$.

Wegen der Sublinearität von $\limsup$ (siehe Beispiel 8.4) ist alles klar bis auf die erste Ungleichung von (8.1). Diese folgt aus

$$-Y(x) = Y(-x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ macht (8.1) keinen Sinn mehr, eine stetige lineare Fortsetzung von $\lim: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ existiert aber ebenfalls.

8.15. *Beispiel.* Die Abbildung $T: \ell^1 \rightarrow (\ell^\infty)'$, $(Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ist isometrisch auf ihr Bild, aber nicht surjektiv.

Der Beweis der Isometrieeigenschaft verläuft wie gehabt. Wir nehmen nun an, die Abbildung T sei surjektiv. Dann besitzt Y aus Beispiel 8.14 ein Urbild $x \in \ell^1$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = (Tx)(e_n) = Y(e_n) = y(e_n) = 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu $Y \neq 0$.

8.16. **Satz.** Sei E ein normierter Raum, dessen Dualraum E' separabel ist. Dann ist auch E separabel.

8.17. **Definition.** Sei E ein Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt *konvex*, wenn $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ für alle $x, y \in A$ und $\lambda \in [0, 1]$.

8.18. **Definition.** Sei E ein Vektorraum, sei $A \subset E$. Das *Minkowskifunktional* $p_A: E \rightarrow [0, \infty]$ wird definiert als

$$p_A(x) = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in A \right\}.$$

A heißt *absorbierend*, falls $p_A(x) < \infty$ für alle $x \in E$.

8.19. *Bemerkung.* Ist A die offene Einheitskugel eines normierten Raums E , so ist $p_A = \|\cdot\|$.

8.20. **Lemma.** Sei E ein normierter Raum und sei $U \subset E$ konvex mit $U_\epsilon(0) \subset U$. Dann gelten

- (a) $p_U \leq \frac{1}{\epsilon} \|\cdot\|$; speziell ist U absorbierend,
- (b) p_U ist sublinear,
- (c) ist U offen, so gilt $U = p_U^{-1}([0, 1])$.

8.21. **Lemma.** Sei E ein normierter Raum und sei $V \subset E$ konvex und offen mit $0 \notin V$. Dann existiert $y \in E'$ mit

$$\operatorname{Re} y(x) < 0 \text{ für alle } x \in V.$$

8.22. Theorem (Hahn-Banach Trennungssatz (Mazur)). *Sei E ein normierter Raum. $V_1, V_2 \subset E$ seien konvex, außerdem sei V_1 offen. Es gelte $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann existiert $y \in E'$ mit*

$$\operatorname{Re} y(v_1) < \operatorname{Re} y(v_2), \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

8.23. Theorem (strikt Hahn-Banach Trennungssatz (Mazur)). *Sei E ein normierter Raum. $V \subset E$ sei konvex und abgeschlossen, und sei $x \notin V$. Dann existieren $y \in E'$ und $\epsilon > 0$, so dass*

$$\operatorname{Re} y(x) < \operatorname{Re} y(v) - \epsilon \text{ für alle } v \in V.$$

9. SCHWACHE KONVERGENZ UND REFLEXIVITÄT

9.1. Definition. Für $T \in E'$ und $x \in E$ schreiben wir $\langle T, x \rangle$ für $T(x)$.

9.2. Definition. Es sei E ein normierter Raum. Eine Basis der offenen Mengen der *schwachen Topologie* auf E wird gebildet aus allen Mengen der Form $\{x \in E \mid |\langle T, x \rangle| < \epsilon\}$ mit $T \in E'$ und $\epsilon > 0$.

9.3. Bemerkung. (a) Die schwache Topologie ist hausdorffsch, d. h. zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in E$ gibt es disjunkte offene Mengen U, V mit $x \in U$ und $y \in V$.

Das folgt aus dem Satz von Hahn-Banach.

(b) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in der schwachen Topologie gegen x , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, x_n \rangle = \langle T, x \rangle$ für alle $T \in E'$.

Die schwache Topologie hat weniger offene Mengen und daher mehr konvergente Folgen als die Normtopologie. Die schwache Topologie ist i. a. nicht metrisch.

9.4. Beispiel. Für $1 < p < \infty$ bezeichne $e_j = (\delta_{kj})_{k \in \mathbb{N}}$ die Standardbasis des ℓ^p . Die Folge $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen 0.

Daher ist die Einheitsphäre $\{x \in \ell^p \mid \|x\|_p = 1\}$ nicht schwach abgeschlossen.

9.5. Satz. *Es sei E ein normierter Raum, und sei $E'' = (E')'$ sein Bidual. Die Abbildung*

$$J: E \rightarrow E'', \quad J(x)(y) = y(x),$$

ist eine Isometrie auf ihr Bild, d. h. es gilt $\|J(x)\| = \|x\|$ für jedes $x \in E$.

9.6. Definition. Ein normierter Raum E , für den die Abbildung $J: E \rightarrow E''$ aus Satz 9.5 surjektiv (also ein Isomorphismus) ist, heißt *reflexiv*.

9.7. Bemerkungen. (a) Jeder reflexive normierte Raum ist ein Banachraum.

(b) Wenn E reflexiv ist, so ist $E \cong E''$. Die Umkehrung gilt nicht, denn James hat 1951 einen Raum konstruiert, der isometrisch isomorph zu seinem Bidual, aber nicht reflexiv ist.

9.8. **Satz.** *Sei E ein Banachraum. E ist genau dann reflexiv, wenn E' reflexiv ist.*

9.9. **Satz.** *Sei μ ein σ -endliches Maß. Für $1 < p < \infty$ sind ℓ^p und $L^p(\mu)$ reflexiv. Dagegen sind c_0 , ℓ^1 und ℓ^∞ nicht reflexiv.*

9.10. **Bemerkung.** Ein reflexiver Raum ist genau dann separabel, wenn sein Dualraum separabel ist.

Um das folgende Theorem auch für nicht separable Räume zeigen zu können, benötige ich noch den folgenden Satz.

9.11. **Satz.** *Abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume sind reflexiv.*

Das folgende Theorem stammt für den ℓ^2 von Hilbert. Der allgemeine Fall ist von Banach.

9.12. **Theorem.** *In einem reflexiven Raum E besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

10. DER BAIRESCHE KATEGORIENSATZ

Der folgende Satz ist von Baire.

10.1. **Satz.** *Sei X ein vollständiger metrischer Raum, sei $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, wobei alle M_n abgeschlossen sind. Dann besitzt mindestens eine der Mengen M_n einen inneren Punkt.*

10.2. **Definition.** Seien X ein metrischer Raum und M eine Teilmenge von X . M heißt *nirgends dicht* in X , falls $\overline{M}$ keinen inneren Punkt besitzt. M heißt von *erster Kategorie* in X , wenn M abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Andernfalls heißt M von *zweiter Kategorie* in X .

10.3. **Theorem** (Bairescher Kategoriensatz). *Ein vollständiger metrischer Raum ist von zweiter Kategorie in sich.*

10.4. **Definition.** Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *offen*, wenn für jede offene Teilmenge U von X die Bildmenge $f(U)$ ebenfalls offen ist.

10.5. **Lemma.** *Seien X und Y metrische Räume, sei X vollständig. Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig mit der folgenden Eigenschaft*

$$(10.1) \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : \overline{f(U_\epsilon(x))} \supset U_\delta(f(x)).$$

Dann ist f offen.

10.6. Satz. Seien E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Die Abbildung $A: E \rightarrow F$ sei linear und stetig und erfülle

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \overline{A(U_\epsilon(0))} \supset U_\delta(0).$$

Dann ist A offen und surjektiv.

10.7. Lemma. Seien E und F normierte Räume und sei $A \in L(E, F)$. Falls $A(E)$ in F von zweiter Kategorie ist, so existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\overline{A(U_\epsilon(0))} \supset U_\delta(0)$.

10.8. Satz. Seien E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Sei $A \in L(E, F)$ so, dass $A(E)$ in F von zweiter Kategorie ist. Dann ist A offen und surjektiv.

Der Bairesche Kategoriensatz besagt, dass die Bedingung an A automatisch erfüllt ist, falls A surjektiv und F vollständig ist.

10.9. Theorem (Satz von der offenen Abbildung). E und F seien Banachräume. $A: E \rightarrow F$ sei linear, stetig und surjektiv. Dann ist A offen.

Der Satz von der offenen Abbildung gilt auch in vollständigen metrischen Vektorräumen. Hierbei ist vorausgesetzt, dass Metrik und lineare Struktur miteinander verträglich sind. Diese Erweiterung des Satzes von der offenen Abbildung kann mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln gezeigt werden. In höheren Funktionalanalysisvorlesungen wird der Gültigkeitsbereich des Satzes von der offenen Abbildung dann noch einmal kräftig erweitert. Man konsultiere z.B. das Buch von Meise und Vogt [6]. Analoge Bemerkungen gelten auch für den Satz vom abgeschlossenen Graphen, der weiter unten gezeigt wird.

10.10. Theorem (Banachscher Isomorphiesatz). E und F seien Banachräume, $A \in L(E, F)$ sei bijektiv. Dann ist A ein Isomorphismus.

10.11. Korollar. E und F seien Banachräume. Für $A \in L(E, F)$ sind äquivalent:

- (a) A ist injektiv und $\text{Bild } A$ ist abgeschlossen in F ,
- (b) es gibt $c > 0$, so dass $\|Ax\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in E$.

10.12. Definition. Seien X und Y Mengen und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Der Graph von f ist die Menge

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y.$$

10.13. Bemerkungen. (a) Falls E und F Vektorräume sind, so ist $\mathcal{G}(f)$ genau dann ein Unterraum von $E \times F$, wenn f linear ist.

(b) Falls X und Y topologische Räume sind und f stetig ist, so ist $\mathcal{G}(f)$ abgeschlossen. Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

- (c) Seien E und F normierte Räume, und sei $A: E \rightarrow F$ linear. Dann ist $\mathcal{G}(A)$ genau dann abgeschlossen, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein Element $y \in F$ konvergiert, bereits $y = 0$ gilt.

10.14. Theorem (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Es seien E und F Banachräume. Die Abbildung $A: E \rightarrow F$ sei linear, und ihr Graph sei abgeschlossen in $E \times F$. Dann ist A stetig.*

Als Anwendungsbeispiel zeigen wir den folgenden Satz.

10.15. Satz. *Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum E . Betrachte die Dualräume $(E, \|\cdot\|_1)'$ und $(E, \|\cdot\|_2)'$ als Unterräume des algebraischen Dualraums E^* . Falls $(E, \|\cdot\|_1)' = (E, \|\cdot\|_2)'$, so sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.*

10.16. Theorem (Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit). *Seien E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Sei $\mathcal{A} \subset L(E, F)$ so, dass $\sup_{A \in \mathcal{A}} \|Ax\| < \infty$ für jedes $x \in E$. Dann $\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < \infty$.*

10.17. Satz. *Seien E ein normierter Raum und M eine Teilmenge von E , so dass $\sup_{x \in M} |y(x)| < \infty$ für jedes $y \in E'$. Dann $\sup_{x \in M} \|x\| < \infty$.*

10.18. Definition. Seien E und F normierte Räume.

- (a) $M \subset E$ heißt *beschränkt*, wenn $\sup_{x \in M} \|x\| < \infty$.
- (b) $M \subset E$ heißt *schwach beschränkt*, wenn $\sup_{x \in M} |y(x)| < \infty$ für alle $y \in F'$.
- (c) $\mathcal{A} \subset L(E, F)$ heißt *punktweise beschränkt*, wenn $\{Ax \mid A \in \mathcal{A}\}$ für jedes $x \in E$ beschränkt ist.

10.19. Korollar. (a) *In einem normierten Raum ist jede schwach beschränkte Menge beschränkt.*

- (b) *Jede punktweise beschränkte Menge in $L(E, F)$ ist beschränkt, falls E ein Banachraum ist.*

Der folgende Satz ist aus dem Buch von Banach (p. 200 der französischen Ausgabe).

10.20. Satz. *Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine schwache Nullfolge im ℓ^p , $1 < p < \infty$. Dann gibt es eine Teilfolge mit*

$$\left\| \sum_{k=1}^m x_{n_k} \right\|_p = O(m^{1/p}).$$

10.21. Lemma. *Für einen Banachraum E sei $\Phi(E)$ das Supremum aller $p > 1$, so dass jede schwache Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E eine Teilfolge besitzt mit*

$$\left\| \sum_{k=1}^m x_{n_k} \right\| = O(m^{1/p}).$$

Dann ist Φ eine Isomorphieinvariante.

10.22. *Beispiel.* Für $1 \leq p < \infty$ gilt $\Phi(\ell^p) = p$.

10.23. **Korollar.** (a) Für $1 \leq p < q \leq \infty$ sind ℓ^p und ℓ^q nicht isomorph.
 (b) Für $1 \leq p \leq \infty$ und $p \neq 2$ ist der ℓ^p nicht isomorph zu einem Hilbertraum.

10.24. **Satz.** Sei E ein Banachraum, sei F ein normierter Raum, und sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L(E, F)$. Falls $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in E$ konvergiert, so wird durch

$$A: x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$$

ein $A \in L(E, F)$ gegeben.

10.25. **Lemma.** Seien E ein normierter Raum, F ein Banachraum und M eine dichte Teilmenge von E . Gegeben sei eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L(E, F)$ mit den folgenden Eigenschaften

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$,
- (b) für jedes $x \in M$ ist $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in F .

Dann konvergiert $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in E$, und durch $A: x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ wird ein $A \in L(E, F)$ definiert mit $\|A\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|$.

10.26. **Theorem** (Satz von Banach-Steinhaus). Seien E und F Banachräume, und sei M eine dichte Teilmenge von E . Gegeben sei eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} |y(A_n x)| < \infty$ für alle $x \in E$, $y \in F'$,
- (b) $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ ist für jedes $x \in M$ eine Cauchyfolge.

Dann konvergiert $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in E$, und durch $A: x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ wird ein $A \in L(E, F)$ definiert.

Als Anwendung zeige ich die Existenz einer stetigen, 2π -periodischen Funktion mit divergenter Fourierreihe.

10.27. **Definition.** Mit $C_{2\pi}$ werde der Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnet, der aus allen stetigen, 2π -periodischen Funktionen besteht. Für $f \in C_{2\pi}$ und $k \in \mathbb{Z}$ definiere den k -ten *Fourierkoeffizienten* durch

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Die Reihe

$$t \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}$$

heißt *Fourierreihe* von f . Sie konvergiert im L^2 -Sinne.

10.28. **Satz.** Es gibt eine Funktion f in $C_{2\pi}$, deren Fourierreihe im Punkt $t = 0$ divergiert.

Beweis. Definiere

$$S_n: C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}, \quad S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k e^{ikt}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n e^{ikt} &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^n e^{ikt} = -\frac{1}{2} + \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{2e^{i(n+1)t} - 2 - e^{it} + 1}{2(e^{it} - 1)} \\ &= \frac{2e^{i(n+1)t} - 1 - e^{it}}{2(e^{it} - 1)} = \frac{2e^{i(n+1/2)t} - e^{-it/2} - e^{it/2}}{2(e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - \cos(t/2)}{2i \sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} &= 1 + \sum_{k=1}^n e^{ikt} + \sum_{k=1}^n e^{-ikt} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - \cos(t/2)}{2i \sin(t/2)} + \frac{e^{-i(n+1/2)t} - \cos(t/2)}{-2i \sin(t/2)} \\ &= \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{2i \sin(t/2)} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Daher gilt für $f \in C_{2\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt+ikx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin((n+1/2)(t-x))}{\sin((t-x)/2)} dt.$$

Insbesondere haben die Linearformen

$$L_n: C_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto S_n(f)(0),$$

die Darstellung

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} dt.$$

Wir behaupten, dass $(\|L_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Setze dazu

$$\xi_j = \frac{4j+1}{4n+2}\pi, \quad \eta_j = \frac{4j+3}{4n+2}\pi, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Beachte

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \xi_j = \frac{2n+1}{2} \frac{4j+1}{4n+2} \pi = \left(j + \frac{1}{4}\right) \pi, \quad \left(n + \frac{1}{2}\right) \eta_j = \left(j + \frac{3}{4}\right) \pi.$$

Also $|\sin((n+1/2)t)| \geq \sqrt{2}/2$ für $t \in [\xi_j, \eta_j]$. Wähle $\epsilon_j > 0$ so klein, dass $\sin((n+1/2)t) \neq 0$ für $t \in [\xi_j - \epsilon_j, \eta_j + \epsilon_j]$. Beachte, dass $0 < \xi_j < \eta_j < 2\pi$ falls $j \leq 2n$. Wähle $h \in C_{2\pi}$ mit $-1 \leq h \leq 1$ so, dass $h(t) = 1$ falls $\xi_j \leq t \leq \eta_j$ für ein $j < 2n$ und $h(t) = 0$ falls $t \notin \bigcup_{j=1}^{2n} [\xi_j - \epsilon_j, \eta_j + \epsilon_j]$. Außerdem soll h auf $[\xi_j - \epsilon_j, \eta_j + \epsilon_j]$ dasselbe

Vorzeichen haben wie $\sin((n + 1/2)t)$. Dann

$$\begin{aligned} L_n(h) &\geq \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_j}^{\eta_j} \left| \frac{\sin((n + 1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| \geq \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_j}^{\eta_j} \frac{\sqrt{2}}{t} \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \ln \frac{\eta_j}{\xi_j} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{2}{4j+1} \right). \end{aligned}$$

Also $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|L_n\| = \infty$, denn $\ln(1+x) \geq x/2$ für hinreichend kleine, positive x . Wenn nun die Fourierreihe für jedes $f \in C_{2\pi}$ konvergieren würde, so wäre speziell die Folge $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise beschränkt. Mit dem Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit folgt dann aber auch die Beschränktheit in der Operatornorm, welche wir gerade widerlegt haben. Die Annahme war also falsch, und es gibt Funktionen in $C_{2\pi}$, deren Fourierreihe in 0 nicht konvergiert. $\square$

11. TRANSPONIERTE OPERATOREN

11.1. Definition. Seien X und Y normierte Räume, und sei $T \in L(X, Y)$. Der *transponierte Operator* $T' \in L(Y', X')$ wird definiert durch

$$(T'y)(x) = y(Tx), \quad y \in Y', x \in X.$$

Es ist klar, dass in der Tat $T' \in L(Y', X')$.

11.2. Beispiele. (a) Das folgende, simple Beispiel ist das in den Anwendungen häufigste:

Sei $\iota: X \hookrightarrow Y$ die Einbettung des Unterraums X nach Y . Dann gilt für $y \in Y'$ und $x \in X$ $\iota'(y)(x) = y(\iota x)$. Also $\iota'(y) = y|_X$.

(b) Sei $1 \leq p < \infty$, und sei $T \in L(\ell^p)$ der *Linksshift*

$$T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Wir identifizieren $(\ell^p)'$ mit ℓ^q , wobei q der zu p konjugierte Exponent ist. Wir schreiben die Identifikationsabbildungen nicht mehr explizit hin. Dann gilt für $y \in (\ell^p)' = \ell^q$ und $x \in \ell^p$

$$(T'y)(x) = y(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} y_{n-1} x_n = w(x)$$

für

$$w_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ y_{n-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist T' der *Rechtsshift*

$$T'(y_1, y_2, \dots) = (0, y_1, y_2, \dots).$$

- (c) Sei $k \in L^2([0, 1]^2)$. Sie werden in den Übungen zeigen, dass dann ein Operator $T_k \in L(L^2([0, 1]))$ gegeben wird durch

$$T_k(f)(s) = \int_0^1 k(s, t)f(t) dt.$$

Dann gilt $T'_k = T_{\tilde{k}}$ für $\tilde{k}(s, t) = k(t, s)$. Auch das werden Sie in den Übungen zeigen.

- 11.3. **Satz.** (a) Die Abbildung $T \mapsto T'$ von $L(X, Y)$ nach $L(Y', X')$ ist linear und isometrisch (aber, wie später gezeigt werden wird, i. a. nicht surjektiv).
 (b) $(ST)' = T'S'$ für $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$.

11.4. **Lemma.** Seien X und Y normierte Räume. Wie im vorigen Kapitel seien $J_X: X \rightarrow X''$ und $J_Y: Y \rightarrow Y''$ die kanonischen Einbettungen in die jeweiligen Bidualräume. Dann gilt für $T \in L(X, Y)$ (Diagramm!)

$$T'' \circ J_X = J_Y \circ T.$$

11.5. *Beispiel.* Sei $X = Y = c_0$. Dann $X' = Y' = \ell^1$ und $X'' = Y'' = \ell^\infty$. Definiere $S \in L(\ell^1)$ durch

$$S(y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j, 0, 0, \dots \right).$$

Dann für $x \in \ell^\infty$

$$S'(x)(y) = x(Sy) = x_1 \sum_{j=1}^{\infty} y_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_1 y_j$$

und folglich

$$S'(x) = (x_1, x_1, \dots).$$

Also $S'(c_0) \not\subset c_0$. Wir behaupten, dass daraus bereits folgt, dass S kein transponierter Operator ist. Angenommen, $S = T'$ für ein $T \in L(c_0)$, dann $S'(c_0) = T''(c_0) = T(c_0) \subset c_0$. Da dies nicht zutrifft, ist S kein transponierter Operator.

11.6. **Definition.** Es seien E ein normierter Raum und F ein Unterraum von E' . Der Raum

$$F_\perp = \{x \in E \mid y(x) = 0 \text{ für alle } y \in F\}$$

heißt *Annihilator* von F in E .

Wenn man sich auf reflexive Räume beschränkt, kommt man mit $F^\perp$ aus.

11.7. **Satz.** Seien E und F normierte Räume, und sei $T \in L(E, F)$. Dann

$$\overline{\text{Bild } T} = (\ker T')_\perp.$$

11.8. **Korollar.** Seien E, F normierte Räume, sei $T \in L(E, F)$ ein Operator mit abgeschlossenem Bild. Sei $y \in F$. Die Gleichung $Tx = y$ besitzt genau dann eine Lösung x , wenn die folgenden Implikation gilt:

$$T'z = 0 \Rightarrow z(y) = 0, \quad z \in F'.$$

11.9. Satz. Seien E und F Banachräume, sei $A \in L(E, F)$. Falls $\text{Bild } A$ abgeschlossen ist, so gelten

- (a) $\text{Bild } A = (\ker A')^\perp$,
- (b) $(\text{Bild } A)^\perp = \ker A'$,
- (c) $\text{Bild } A' = (\ker A)^\perp$,
- (d) $(\text{Bild } A')^\perp = \ker A$.

12. KOMPAKTE OPERATOREN

Erinnerung: Eine Teilmenge A eines metrischen Raums heißt *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluss kompakt ist.

12.1. Definition. Seien E und F normierte Räume. Eine lineare Abbildung $A: E \rightarrow F$ heißt *kompakt*, wenn $A(U_1(0))$ relativ kompakt ist. Wir definieren $K(E, F) = \{A: E \rightarrow F \mid A \text{ kompakt}\}$ und $K(E) = K(E, E)$.

Um zu zeigen, dass die Identität $\text{id}: E \rightarrow E$ nicht kompakt ist, wenn E unendliche Dimension hat, benötigen wir etwas Vorbereitung.

12.2. Lemma (Rieszsches Lemma). Sei F ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raums E mit $F \neq E$. Für jedes δ mit $0 < \delta < 1$ existiert $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und

$$\|x - u\| \geq 1 - \delta \quad \text{für alle } u \in F.$$

12.3. Satz. Für einen normierten Raum E sind äquivalent:

- (a) $\dim E < \infty$,
- (b) $\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt,
- (c) jede beschränkte Folge in E besitzt eine konvergente Teilfolge.

Speziell ist $\text{id}: E \rightarrow E$ genau dann kompakt, wenn $\dim E < \infty$.

12.4. Satz. Seien E ein normierter und F ein Banachraum. Dann ist $K(E, F)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(E, F)$.

12.5. Korollar. Seien E ein normierter und F ein Banachraum, und sei $T \in L(E, F)$. Falls es eine Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger linearer Operatoren mit endlich dimensionalem Bild gibt, die gegen T konvergiert, so ist T kompakt.

Bemerkung. Eine schwierige Frage, die die Funktionalanalysis lange beschäftigt hat, ist, ob die Umkehrung von Korollar 12.5 gilt. Sie wurde 1973 von Enflo mit „nein“ beantwortet. Sein Gegenbeispiel ist außerordentlich kompliziert.

12.6. Beispiel. In den Übungen wurde gezeigt, dass für $k \in L^2([0, 1]^2)$ der zugehörige Fredholmsche Integraloperator gegeben wird durch

$$T_k: L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1], \quad T_k(f)(s) = \int_0^1 k(s, t)f(t)dt.$$

Für jedes k ist T_k kompakt. Das sieht man wie folgt: Für gegebenes $\epsilon > 0$ approximiere k durch eine Treppenfunktion τ mit $\|k - \tau\|_2 < \epsilon$. Dabei dürfen wir die Träger der Treppenstufen sogar als Rechtecke voraussetzen. Es gilt $\|T_k - T_\tau\| = \|T_{k-\tau}\| \leq \|k - \tau\|_2 \leq \epsilon$. Wir zeigen, dass T_τ endliche Bilddimension besitzt. Dazu schreiben wir τ aus

$$\tau = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j \times F_j}.$$

Also wegen $\chi_{E_j \times F_j}(s, t) = \chi_{E_j}(s) \chi_{F_j}(t)$

$$T_\tau(f)(s) = \sum_{j=1}^N a_j \int_0^1 \chi_{E_j}(s) \chi_{F_j}(t) f(t) dt = \sum_{j=1}^N \left(a_j \int_{F_j} f(t) dt \right) \chi_{E_j}(s)$$

Also Bild $T_\tau \in \text{LH}(\chi_{E_1}, \dots, \chi_{E_N})$.

12.7. Satz. Seien E, F, G normierte Räume, seien $T \in L(E, F)$ und $S \in L(F, G)$. Falls eine der beiden Abbildungen S oder T kompakt ist, so auch die Hintereinanderausführung $S \circ T$.

Aus der Analysis kennen wir den Satz von Arzelà-Ascoli, der mit dem bereits öfter benutzten Diagonalfolgenargument bewiesen wird.

12.8. Theorem (Arzelà-Ascoli). Sei (S, d) ein kompakter metrischer Raum, sei $C(S)$ wie üblich mit der Supremumsnorm versehen, und sei M eine Teilmenge von $C(S)$, welche beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig ist. Dann ist M kompakt.

Zur Erinnerung: M heißt *gleichgradig stetig*, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in M : d(s, t) < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon.$$

12.9. Theorem (Satz von Schauder). E und F seien Banachräume, und sei $A \in L(E, F)$. Dann ist A genau dann kompakt, wenn A' kompakt ist.

13. SPEKTRALTHEORIE FÜR KOMPAKTE OPERATOREN

13.1. Definition. Seien E ein Banachraum und $A \in L(E)$.

(a) Das *Spektrum* von A ist definiert als

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ id} - A \text{ ist kein Isomorphismus}\}.$$

$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ ist die *Resolventenmenge* von A .

(b) $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* von A , wenn es ein $x \in E \setminus \{0\}$ gibt mit $Ax = \lambda x$. Die Menge

$$E_\lambda = \{x \in E \mid Ax = \lambda x\} = \ker(\lambda \text{ id} - A)$$

heißt *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ . Die von Null verschiedenen Elemente von E_λ heißen *Eigenvektoren* von A zum Eigenwert λ .

13.2. *Bemerkung.* Die Eigenwerte von A gehören offenbar zu $\sigma(A)$. Falls $\dim E < \infty$, so gilt $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$. Falls $\dim E = \infty$, so enthält das Spektrum im allgemeinen Zahlen, die keine Eigenwerte sind. Betrachte z.B. den Operator

$$A: \ell^2 \rightarrow \ell^2, \quad x \mapsto \left(\frac{1}{n} x_n \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Er ist injektiv, aber nicht surjektiv. Daher gehört 0 zu $\sigma(A)$, obwohl 0 kein Eigenwert von A ist.

13.3. **Lemma.** Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann $\dim \ker(\text{id} - A) < \infty$.

13.4. **Satz (Neumannsche Reihe).** Es seien E ein Banachraum und $A \in L(E)$ ein invertierbarer Operator. Falls für $B \in L(E)$ gilt

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

so ist B invertierbar.

13.5. **Korollar.** $\rho(A)$ ist offen und $\sigma(A)$ ist abgeschlossen.

13.6. **Lemma.** Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann ist $\text{Bild}(\text{id} - A)$ abgeschlossen.

13.7. **Definition.** (a) Sei E ein Vektorraum und $F \subset E$ ein Unterraum. Die *Kodimension* von F in E ist definiert als $\text{codim } F = \dim E/F$.

(b) Seien E ein Banachraum und $S \in L(E)$. Der Operator S heißt *Fredholm-Operator*, wenn sein Kern endliche Dimension besitzt und sein Bild abgeschlossen ist und endliche Kodimension besitzt.

(c) Für einen Fredholm-Operator S auf E bezeichnet man die Zahl

$$\text{ind}(S) = \dim \ker S - \text{codim Bild } S$$

als *Index* von S .

13.8. *Bemerkung.* Sei $E = \mathbb{C}^n$. Dann ist offenbar jeder Operator in $A \in L(E)$ ein Fredholm-Operator. Aus dem Rangsatz folgt sogar $\text{ind}(A) = 0$.

13.9. **Satz.** Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann ist $\text{id} - A$ ein Fredholm-Operator.

13.10. *Bemerkung.* Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Setze $S = \text{id} - A$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$S^n = (\text{id} - A)^n = \text{id} - \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} A^j.$$

Also ist S^n ebenfalls ein Fredholm-Operator. Ferner sind klar

$$\ker(S^{n+1}) \supset \ker(S^n), \quad \text{Bild}(S^{n+1}) \subset \text{Bild}(S^n).$$

13.11. Lemma. *Seien E ein Banachraum, $A \in K(E)$ und $S = \text{id} - A$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\ker(S^m) = \ker(S^n)$ für alle $m \geq n$.*

13.12. Lemma. *Seien E ein Banachraum, $A \in K(E)$ und $S = \text{id} - A$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für $N = \ker S^n$ und $R = \text{Bild } S^n$ folgendes gilt:*

- (a) *die Kodimension von R in E ist endlich,*
- (b) $N \cap R = \{0\}$,
- (c) $N + R = E$,
- (d) $SN \subset N$,
- (e) $SR \subset R$,
- (f) $S_R: R \rightarrow R, x \mapsto S(x)$, *ist invertierbar,*
- (g) $(S|_N)^n = 0$,
- (h) $\text{ind } S^n = 0$.

13.13. Lemma. *Sei E ein Banachraum. Ein abgeschlossener Unterraum F_1 von E ist komplementiert, wenn es einen weiteren abgeschlossenen Unterraum F_2 von E gibt, so dass $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ und $F_1 + F_2 = E$.*

Beweis als Übung. Man sagt dann auch, F_1 sei komplementiert zu F_2 . Das Komplement ist im allgemeinen nicht eindeutig.

13.14. Definition. Sei E ein Banachraum. Zwei abgeschlossene Unterräume F_1 und F_2 von E heißen *komplementiert*, wenn $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ und $F_1 + F_2 = E$. Man schreibt dann auch $E = F_1 \oplus F_2$.

13.15. Lemma. *Seien E ein unendlich-dimensionaler Banachraum und $A \in K(E)$. Für jedes $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ gibt es komplementierte Unterräume R_λ und N_λ von E , welche von $\lambda \text{id} - A$ in sich selbst abgebildet werden und für die gelten*

- (a) $(\lambda \text{id} - A)|_{R_\lambda}: R_\lambda \rightarrow R_\lambda$ *ist ein Isomorphismus,*
- (b) *es gibt ein (von λ abhängiges) $n \in \mathbb{N}$, so dass $(\lambda \text{id} - A)|_{N_\lambda}^n \equiv 0$,*
- (c) $\{0\} \neq \ker(\lambda \text{id} - A) \subset N_\lambda$ *und $\dim N_\lambda < \infty$; speziell ist λ ein Eigenwert von A .*

Ferner ist $\sigma(A)$ abgeschlossen mit

$$0 \in \sigma(A), \quad \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

13.16. Satz. *Sei E ein unendlich-dimensionaler Banachraum, und sei $A \in K(E)$. Dann gelten*

- (a) $0 \in \sigma(A)$,
- (b) *jedes $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert von A , und der zugehörige Eigenraum E_λ ist endlich-dimensional,*
- (c) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *ist höchstens abzählbar; wenn $\sigma(A) \setminus \{0\}$ unendlich ist, dann ist 0 der einzige Häufungspunkt von $\sigma(A)$,*

- (d) für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\text{ind}(\lambda \text{id} - A) = 0$; speziell gilt für $\lambda \neq 0$ die Fredholmsche Alternative:

$$\lambda \text{id} - A \text{ injektiv} \Leftrightarrow \lambda \text{id} - A \text{ surjektiv.}$$

Das Kapitel wird abgeschlossen durch ein Beispiel zur Fredholmschen Alternative.

13.17. *Beispiel.* Für $k \in C([0, 1]^2)$ betrachten wir den *Volterraschen Integraloperator*

$$T: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], \quad Tf(s) = \int_0^s k(s, t)f(t) dt.$$

In Aufgabe 2 von Blatt 8 wurde die Kompaktheit von T gezeigt. Für $\lambda \neq 0$ wollen wir die Lösbarkeit der Integralgleichung

$$Tf - \lambda f = g$$

für beliebiges $g \in C[0, 1]$ zeigen. Wegen der Fredholmschen Alternative brauchen wir dazu nur die Injektivität von $T - \lambda \text{id}$ nachzuweisen. Da wir k durch k/λ ersetzen können, dürfen wir o. E. $\lambda = 1$ annehmen. Sei nun $f \in \ker(T - \text{id})$. Dann gilt

$$|f(s)| = |Tf(s)| \leq \int_0^s |k(s, t)||f(t)| dt \leq s \|k\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Wir setzen diese Abschätzung wieder in die Formel für Tf ein

$$|f(s)| = |Tf(s)| \leq \int_0^s |k(s, t)|t \|k\|_\infty \|f\|_\infty dt \leq \frac{s^2}{2} \|k\|_\infty^2 \|f\|_\infty.$$

Durch wiederholtes Einsetzen erhält man schließlich

$$|f(s)| \leq \frac{s^n}{n!} \|k\|_\infty^n \|f\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{mit } n \rightarrow \infty.$$

Daher $f = 0$. Folglich ist $T - \lambda \text{id}$ injektiv und wegen der Fredholmschen Alternative auch surjektiv.

Wir haben außerdem gezeigt, dass $\sigma(T) = \{0\}$, denn 0 ist immer im Spektrum.

14. BESCHRÄNKTE SELBSTADJUNGIERTE OPERATOREN

14.1. **Definition.** Seien E und F Hilberträume, und sei $A \in L(E, F)$. Für jedes $y \in F$ ist $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ stetig. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt daher die Existenz eines eindeutig bestimmten Elements $A^*y \in E$ mit $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ für alle $x \in E$. Die Abbildung $A^*: F \rightarrow E$ ist die *Adjungierte* von A .

14.2. *Bemerkung.* $A^* \in L(F, E)$. Die Linearität ist klar. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz wissen wir, dass $\|A^*y\|$ gleich der Norm des Funktionals $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ ist. Diese ist wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung höchstens gleich $\|A\| \|y\|$. Also $\|A^*\| \leq \|A\|$.

14.3. **Satz.** E, F und G seien Hilberträume.

- (a) Die Abbildung $A \mapsto A^*$ ist ein isometrischer, konjugiert-linearer Isomorphismus von $L(E, F)$ auf $L(F, E)$,
- (b) $A^{**} = A$ für jedes $A \in L(E, F)$,
- (c) $\|A^*A\| = \|A\|^2$ für jedes $A \in L(E, F)$,
- (d) $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$ für $A \in L(E, F)$, $B \in L(F, G)$.

14.4. Definition. E sei ein Hilbertraum. Ein Operator $A \in L(E)$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$. Ein Operator $A \in L(E, F)$ heißt *unitär*, wenn $A^* = A^{-1}$.

Bemerkung. Man spricht auch von beschränkten selbstadjungierten Operatoren, um den Unterschied zu den unbeschränkten, d. h. unstetigen selbstadjungierten Operatoren hervorzuheben, mit denen wir uns später noch beschäftigen werden.

14.5. Lemma. A sei ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum E . Dann gelten

- (a) $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in E$,
- (b) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x \rangle| \mid \|x\| = 1\}$.

14.6. Satz. Seien E ein Hilbertraum und $P \in L(E)$ eine Projektion. P ist genau dann orthogonal, wenn P selbstadjungiert ist.

Beweis. Übung. □

15. SPEKTRALTHEORIE FÜR KOMPAKTE OPERATOREN AUF HILBERTRÄUMEN

15.1. Lemma. Seien H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann ist mindestens eine der beiden Zahlen $\|A\|$ oder $-\|A\|$ ein Eigenwert von A .

15.2. Definition. Seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Eine *Eigenwertfolge* von A ist eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\sigma(A)$ derart, dass alle von 0 verschiedenen Eigenwerte von A so oft aufgezählt werden, wie ihre algebraische Vielfachheit angibt, und die Folge der Beträge monoton fällt. Falls es nur endlich viele Eigenwerte gibt, wird die Folge durch Nullen aufgefüllt.

Bemerkung. D. h. $(|\lambda_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, und für jedes $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ gilt $\#\{n \mid \lambda_n = \lambda\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \dim \ker(A - \lambda \text{id})^n$. Die Eigenwertfolge ist eindeutig bis auf Permutationen von Eigenwerten mit gleichem Betrag.

15.3. Theorem. Seien H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Sei ferner $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Eigenwertfolge von A . Dann $\lambda_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner existiert ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H , so dass $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle e_n$, wobei die Folge in der Operatornorm konvergiert.

15.4. Satz. Seien H und G unendlich-dimensionale Hilberträume, und sei $A \in K(H, G)$. Es existieren eine Nullfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $[0, \infty[$ und Orthonormalsysteme $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in H und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in G , so dass

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \langle \cdot, e_n \rangle f_n,$$

wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert.

15.5. Korollar. Seien H und G Hilberträume. Dann ist jeder Operator in $K(H, G)$ Grenzwert eine Folge von Operatoren mit endlichem Rang (also endlichdimensionalem Bild) in der Operatornorm.

15.6. Bemerkung. Die Darstellung aus Satz 15.4 heißt *Schmidt-Darstellung* von A . Man kann zeigen, dass die Zahlen s_n , $n \in \mathbb{N}_0$, von der Wahl der Orthonormalsysteme unabhängig sind. Sie heißen *singuläre Zahlen* des Operators A .

Die kompakten Operatoren werden danach unterteilt, ob die singulären Zahlen in einem ℓ^p liegen. Diejenigen, für die $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in ℓ^2 liegt, heißen *Hilbert-Schmidt-Operatoren*, diejenigen, für die diese Folge sogar in ℓ^1 liegt, heißen *nuklear*.

16. SOBOLEV-RÄUME

16.1. Definition. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen definieren wir $\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \mid \text{Supp } f \subset \Omega\}$.

16.2. Beispiel. Wir wollen den Begriff der schwachen Ableitung motivieren. Sei dazu $\Omega =]0, 1[$. Wähle $f \in C^1(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann folgt durch partielle Integration

$$\int_{\Omega} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \varphi'(x) dx,$$

denn die Randterme verschwinden. Das können wir vornehmer ausdrücken, wenn wir das Skalarprodukt des $L^2(\Omega)$ zu Hilfe nehmen:

$$\langle f', \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle.$$

Um dasselbe Ergebnis in mehreren Veränderlichen zu beweisen, kann man den Gaußschen Integralsatz verwenden. Man kann das Ergebnis aber auch zu Fuß mit partieller Integration herleiten, weil alle Integranden kompakten Träger in Ω haben und daher auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden können. Jedenfalls gilt für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und alle $f \in C^1(\Omega)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle f', \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle.$$

16.3. Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann heißt $g \in L^2(\Omega)$ *schwache Ableitung* von f , wenn

$$\langle g, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \varphi^{(\alpha)} \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Wir schreiben dann $D^\alpha f$ oder $f^{(\alpha)}$ für g .

16.4. *Beispiel.* Sei $\Omega =]-1, 1[$, sei $f(x) = |x|$. Dann ist g mit $g(x) = \text{signum}(x)$ die schwache Ableitung von f . Das rechnet man sofort nach, indem man die Integrale $\int_{-1}^0$ und $\int_0^1$ einzeln partiell integriert.

16.5. **Definition.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $m \in \mathbb{N}_0$.

- (a) $W_m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \text{für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \text{ existiert die schwache Ableitung } D^\alpha f \text{ in } L^2(\Omega)\}$.
- (b) $\langle f, g \rangle_{W^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle$ für $f, g \in W^m(\Omega)$.
- (c) $H_0^m(\Omega)$ ist der Abschluß von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^m(\Omega)$.

Die Räume $W^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$ heißen *Sobolevräume*.

16.6. **Satz.** $W_m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$ sind Hilberträume.

16.7. *Beispiel.* Sei $I =]-1, 1[$, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Dann $f \in W^1(I) \setminus W^2(I)$.

Wir hatten die schwache Ableitung von f bereits ausgerechnet, $f' = \text{signum}$. Durch Aufteilen des Integrals wie oben sehen wir, dass $\int_{-1}^1 \text{signum}(x) \varphi'(x) dx = 2\varphi(0)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Es gibt aber kein $g \in L^2(I)$ mit $\int_{-1}^1 g \varphi = \varphi(0)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, denn ein solches g müsste wegen der Dichtheit von $\mathcal{D}(J)$ in $L^2(J)$ auf jedem Teilintervall J von $I \setminus \{0\}$ verschwinden.

Bemerkung. Der Begriff der verallgemeinerten Ableitung wurde von Sobolev eingeführt. Wenn man sich nicht darauf kapriziert, dass die Ableitung eine konkrete L^2 -Funktion sein soll, dann geht es noch schwächer. Das hat Schwartz mit seiner Distributionstheorie gemacht. In dieser Theorie kann man jede stetige Funktion beliebig oft ableiten.

17. DIE FOURIERTRANSFORMATION

17.1. **Definition.** $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ ist der Raum der *im Unendlichen verschwindenden* stetigen Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Er wird mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

Es ist leicht zu sehen, dass $C_0(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum ist.

17.2. **Bezeichnung.** Für $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$x\xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \quad x^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad |x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}.$$

17.3. **Definition.** Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ setze

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Die Funktion $\mathcal{F}f$ heißt *Fouriertransformierte* von f , und die Abbildung $\mathcal{F}$ heißt *Fouriertransformation*.

17.4. **Satz.** Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Ferner ist $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ stetig und linear mit $\|\mathcal{F}\| \leq (2\pi)^{-n/2}$.

17.5. **Definition.** Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, wenn

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = 0$$

für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Der Raum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid D^\beta f \text{ schnell fallend für jedes } \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

heißt *Schwartzraum*. Die Elemente von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heißen *Schwartzfunktionen*.

17.6. **Bemerkungen.** (a) Der Schwartzraum heißt nach Laurent Schwartz (1915–2002).

(b) Ein Beispiel für eine Schwartzfunktion ist $x \mapsto e^{-x^2}$.

(c) Offenbar $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $p \geq 1$.

(d) Eine C^∞ -Funktion f ist genau dann eine Schwartzfunktion, wenn

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^m) |D^\alpha f(x)| < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

(e) Der Schwartzraum kann nicht normiert werden. Er ist ein Fréchetraum, also ein vollständiger metrischer Vektorraum mit einem konvexen System von Nullumgebungen.

17.7. **Lemma.** Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gelten

(a) $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $D^\alpha(\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)$,

(b) $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}f$.

17.8. **Lemma.** Wenn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann auch $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

17.9. **Notation.** Mit $\gamma(x) = e^{-x^2/2}$ bezeichnen wir den *Gauß-Kern*. Für $a > 0$ setzen wir ferner $\gamma_a(x) = \gamma(ax)$.

Der Gaußkern ist fast die einzige Funktion, deren Fouriertransformierte wir tatsächlich berechnen müssen. Aus der Analysis wissen wir

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x) dx = 1.$$

17.10. **Lemma.**

$$\mathcal{F}\gamma = \gamma, \quad (\mathcal{F}\gamma_a)(\xi) = \frac{1}{a^n} (\mathcal{F}\gamma)\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

17.11. **Lemma.** Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}f)(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

17.12. **Theorem.** Die Fouriertransformation ist eine Bijektion von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf sich. Ihre Inverse wird gegeben durch

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ferner gilt

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}.$$

17.13. *Bemerkung.* Wir haben gezeigt, dass $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, läßt sich $\mathcal{F}$ stetig zu einer Isometrie $\mathcal{F}_2: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Diese Fortsetzung heißt *Fourier-Plancherel-Transformation*. Man beachte, dass $\mathcal{F}_2$ nicht durch die Integralformel gegeben ist. Den Zusammenhang erläutert das nächste Lemma.

17.14. **Lemma.** Für $R > 0$ setze

$$g_R(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|x| \leq R} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Dann gilt für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(\mathcal{F}_2 f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad \text{fast überall.}$$

Ferner gilt für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}_2 f = \lim_{R \rightarrow \infty} g_R,$$

wobei Konvergenz im Sinne von $L^2(\mathbb{R}^n)$ vorliegt.

Wir werden ab sofort darauf verzichten, die Operatoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_2$ zu unterscheiden.

17.15. **Lemma.** Sei $f \in W^m(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $|\alpha| \leq m$

$$\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}f.$$

17.16. **Satz.**

$$W^m(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |\xi|^2)^{m/2} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Bemerkung. Diesen Satz kann man verwenden, um $W^s(\mathbb{R}^n)$ für $s \notin \mathbb{N}_0$ zu erklären. Für $s \notin \mathbb{N}_0$ und $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ wird die Definition von $W^s(\Omega)$ allerdings schwieriger. In diesem Fall verwendet Taylor [8] die Methode der komplexen Interpolation. Sie erlaubt es, zu je zwei Banachräumen $F \hookrightarrow E$ eine Schar von Zwischenräumen $[E, F]_\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, zu konstruieren.

Man braucht reelle positive Sobolev-Ordnungen s für die Untersuchung von Rändern. Für $s > 1/2$ und glatt berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ setzt sich nämlich jedes $f \in W^s(\Omega)$ zu $g \in W^{s-1/2}(\partial\Omega)$ fort ([8], Proposition 4.4.5).

18. DIE EINBETTUNGSSÄTZE VON SOBOLEV UND RELICH

18.1. **Theorem** (Sobolev-Lemma). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $m, k \in \mathbb{N}_0$ mit $m > k + \frac{n}{2}$. Zu jedem $f \in W^m(\Omega)$ existiert ein Repräsentant in $C^k(\Omega)$.

18.2. **Lemma.** Sei Ω eine beschränkte, offene Menge im $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt.

18.3. **Theorem** (Rellichscher Einbettungssatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Einbettung $H_0^m(\Omega) \hookrightarrow H_0^{m-1}(\Omega)$ kompakt.

18.4. **Satz.** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $W^m(\mathbb{R}^n)$.

18.5. **Bezeichnung.** Wir bezeichnen den offenen Halbraum

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 > 0, x_2, \dots, x_n \text{ beliebig}\}$$

mit $\mathbb{R}_+^n$.

18.6. **Lemma.** Sei $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$. Definieren für $\epsilon \geq 0$

$$\tau_\epsilon(f)(x) = \begin{cases} f(x_1 + \epsilon, x_2, \dots, x_n), & x_1 > -\epsilon, \\ 0, & x_1 \leq -\epsilon. \end{cases}$$

Dann $\tau_\epsilon|_{\mathbb{R}_+^n} \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ und

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \tau_\epsilon|_{\mathbb{R}_+^n}(f) = f \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_+^n).$$

18.7. **Lemma.** Sei $m \in \mathbb{N}$, sei $f \in W^m(\mathbb{R}_+^n)$. Wähle $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{Supp}(\chi) \subset]0, \infty[$ und $\chi(t) = 1$ für alle $t > 1$. Setze $\chi_\epsilon(t) = \chi((t + \epsilon)/\epsilon)$. Dann ist für jedes $\epsilon > 0$ die Funktion

$$f_\epsilon(x) = \chi_\epsilon(x_1) \tau_\epsilon(f)(x)$$

in $W^m(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} f_\epsilon = f \quad \text{in } W^m(\mathbb{R}_+^n).$$

18.8. **Definition.**

$$\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) = \{f|_{\mathbb{R}_+^n} \mid f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}.$$

18.9. **Satz.** $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ ist dicht in $W^m(\mathbb{R}_+^n)$.

18.10. **Definition.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetige lineare Abbildung $E: W^m(\Omega) \rightarrow W^m(\mathbb{R}^n)$, so dass $E(f)|_\Omega = f$ für alle $f \in W^m(\Omega)$, bezeichnet man als *Ausdehnungsoperator*.

18.11. **Satz.** $W^m(\mathbb{R}_+^n)$ besitzt einen Ausdehnungsoperator.

18.12. **Lemma (Verheftungslemma).** Es seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, und es sei $f: \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{K}$ derart, dass die Einschränkungen $f|_{\Omega_j}$ jeweils in $W^m(\Omega_j)$ sind. Dann $f \in W^m(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.

18.13. **Theorem.** Wenn Ω eine beschränkte offene Menge mit C^∞ -Rand ist, dann besitzt $W^m(\Omega)$ für jedes m einen Ausdehnungsoperator.

18.14. **Satz.** Es sei Ω eine beschränkte, offene Menge, die einen Ausdehnungsoperator besitzt. Dann ist die Einbettung $W^m(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1}(\Omega)$ kompakt.

18.15. **Korollar.** Wenn Ω eine beschränkte offene Menge mit C^∞ -Rand ist, dann ist die Einbettung $W^m(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1}(\Omega)$ kompakt.

19. UNBESCHRÄNKTE OPERATOREN ZWISCHEN HILBERTRÄUMEN

Problem: Differentialoperatoren sind keine stetigen Endomorphismen.

19.1. **Lemma.** *Seien H und G zwei Hilberträume. Das Produkt $H \times G$ wird durch*

$$\langle (x, y), (s, t) \rangle = \langle x, s \rangle + \langle y, t \rangle, \quad x, s \in H, y, t \in G,$$

zu einem Hilbertraum.

19.2. **Definition.** Ein *Operator* A von H nach G ist eine lineare Abbildung A von einem Unterraum $D(A)$ von H mit Werten in G . $D(A)$ ist der *Definitionsbereich* von A , $R(A) = \{Ax \mid x \in D(A)\}$ ist sein *Bild*. Der Prähilbertraum $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\}$ ist der *Graph* von A .

Der Operator A ist *dicht definiert*, wenn sein Definitionsbereich dicht ist.

Sind A und B zwei Operatoren von H nach G und gilt $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$, so bezeichnet man B als *Erweiterung* von A und A als *Einschränkung* von B .

19.3. **Lemma.** *Ein Unterraum L von $H \times G$ ist genau dann der Graph eines Operators von H nach G , wenn $\{(x, y) \in L \mid x = 0\} = \{(0, 0)\}$.*

19.4. **Lemma.** *Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G . Dann definieren wir $D(A^*) = \{y \in G \mid x \mapsto \langle Ax, y \rangle \text{ ist stetig auf } D(A)\}$. Es gelten*

- (a) $D(A^*)$ ist ein linearer Unterraum von G .
- (b) Für jedes $y \in D(A^*)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $A^*y \in H$ mit

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \text{für alle } x \in D(A).$$

- (c) $A^*: D(A^*) \rightarrow H$ ist linear.

19.5. **Definition.** Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G . Den Operator A^* aus 19.4 bezeichnet man als den zu A *adjungierten* Operator.

19.6. **Bezeichnung.** Definiere $U: H \times G \rightarrow G \times H$, $U(x, y) = (-y, x)$. Dann ist U offenbar ein unitärer Isomorphismus.

19.7. **Lemma.** *Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G . Dann*

$$(19.1) \quad \mathcal{G}(A^*) = U(\mathcal{G}(A))^\perp = (U\mathcal{G}(A))^\perp.$$

19.8. **Bemerkung.** Falls A und B dicht definierte Operatoren mit $A \subset B$ sind, so folgt sofort aus dem vorangegangenen Lemma, dass $B^* \subset A^*$.

19.9. **Definition.** Ein Operator A von H nach G heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph abgeschlossen ist. Er heißt *abschließbar*, wenn $\overline{\mathcal{G}(A)}$ Graph eines Operators B ist. In diesem Fall ist B die *Abschließung* von A . Wir schreiben dann $\overline{A}$.

19.10. **Bemerkungen.** Sei A ein Operator von H nach G .

- (a) A ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D(A)$, die gegen ein $x \in H$ konvergiert und für die $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $y \in G$ konvergiert, bereits $x \in D(A)$ und $Ax = y$ gelten.
- (b) Wenn A abgeschlossen mit $D(A) = H$ ist, dann ist A stetig. Das folgt aus dem Satz von abgeschlossenen Graphen.
- (c) Wenn A abschließbar ist, dann ist $\overline{A}$ ein abgeschlossener Operator mit $A \subset \overline{A}$.
- (d) A ist genau dann abschließbar, wenn A eine abgeschlossene Erweiterung hat.
- (e) A ist genau dann abschließbar, wenn für jede Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für welche $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $y \in G$ konvergiert, bereits $y = 0$ gilt.
 A ist nämlich genau dann abschließbar, wenn $\overline{\mathcal{G}(A)}$ ein Graph ist. Wir haben gezeigt, dass das genau dann der Fall ist, wenn das einzige Element der Form $(0, y)$ in $\overline{\mathcal{G}(A)}$ das Nullelement ist.
- (f) Wenn A abschließbar und dicht definiert ist, dann gilt $\overline{A}^* = A^*$.

19.11. **Satz.** Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G . Dann gelten

- (a) A^* ist abgeschlossen mit $\ker A^* = (\text{Bild } A)^\perp$.
- (b) A^* ist genau dann dicht definiert, wenn A abschließbar ist.
- (c) Wenn A abschließbar ist, dann $\overline{A} = A^{**}$.

19.12. **Korollar.** Wenn A ein dicht definierter, abgeschlossener Operator von H nach G ist, so ist A^* abgeschlossen und dicht definiert, und es gilt $A = A^{**}$.

19.13. **Definition.** Es sei A ein injektiver Operator von H nach G . Dann wird durch

$$\mathcal{G}(A^{-1}) = \{(Ax, x) \mid x \in D(A)\}$$

ein Operator mit Definitionsbereich $D(A^{-1}) = \text{Bild } A$ erklärt. A^{-1} ist der *Inverse* zu A .

Offenbar ist A^{-1} genau dann abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist.

19.14. **Lemma.** Sei A ein injektiver, dicht definierter Operator von H nach G , dessen Bild dicht in G ist. Dann ist A^* injektiv, A^{-1} ist dicht definiert, und es gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

19.15. **Definition.** Für Operatoren A, B von H nach G definieren wir $A + B$ auf $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ durch $(A + B)(x) = Ax + Bx$.

Die Definition macht nur richtig Sinn, wenn einer der beiden Operatoren beschränkt ist.

19.16. **Lemma.** A und B seien Operatoren von H nach G . Dann gelten:

- (a) Falls A abgeschlossen und B beschränkt ist, so ist $A + B$ abgeschlossen.
- (b) Falls $A + B$ dicht definiert ist, so gilt $A^* + B^* \subset (A + B)^*$.
- (c) Falls A dicht definiert und B beschränkt ist, so gilt $A^* + B^* = (A + B)^*$.

19.17. **Definition.** Sei A ein Operator von H nach G , und sei B ein Operator von G nach F . Mit BA wird der Operator bezeichnet, der auf $D(BA) = \{x \in D(A) \mid Ax \in D(B)\}$ definiert ist durch $(BA)x = B(Ax)$.

19.18. **Lemma.** Sei A ein dicht definierter Operator von H nach G , und sei B ein dicht definierter Operator von G nach F . Dann gelten

- (a) $A^*B^* \subset (BA)^*$, falls BA dicht definiert ist.
- (b) Falls B stetig, so ist BA dicht definiert, und es gilt $A^*B^* = (BA)^*$.

19.19. **Definition.** Sei A ein Operator in H . Die Menge

$$\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid (z \operatorname{id} - A) \text{ ist injektiv und } \operatorname{Bild}(z \operatorname{id} - A) = H\}$$

heißt *Resolventenmenge* von A , und die Menge $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt *Spektrum* von A . Für $z \in \rho(A)$ bezeichnet man $R(z, A) = (z \operatorname{id} - A)^{-1}$ als *Resolvente* von A in z .

19.20. *Bemerkung.* Falls A abgeschlossen ist, so gilt $R(z, A) \in L(H)$ für $z \in \rho(A)$.

19.21. **Definition.** Ein dicht definierter Operator A in einem Hilbertraum H heißt *symmetrisch*, wenn $A \subset A^*$. Er heißt *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$.

19.22. *Bemerkung.* Sei A ein dicht definierter, symmetrischer Operator. Dann gilt für $x, y \in D(A)$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Insbesondere ist $\langle Ax, x \rangle$ reell für jedes $x \in D(A)$.

19.23. **Lemma.** Sei A ein symmetrischer Operator in H . Dann ist A abschließbar, und $\overline{A}$ ist symmetrisch.

19.24. **Lemma.** Sei A ein symmetrischer, abgeschlossener Operator in H . Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $z \operatorname{id} - A$ injektiv und $\operatorname{Bild}(z \operatorname{id} - A)$ abgeschlossen.

19.25. **Satz.** Der Operator A sei selbstadjungiert in H . Dann ist sein Spektrum eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $\sigma(A) \neq \emptyset$ für selbstadjungierte Operatoren A .

19.26. **Satz.** Für einen Operator A in H sind äquivalent:

- (a) A ist selbstadjungiert.
- (b) A ist symmetrisch mit $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.
- (c) A ist symmetrisch, und es gibt $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so dass $z, \bar{z} \in \rho(A)$.

20. DIE FRIEDRICHSISCHE ERWEITERUNG

20.1. *Beispiel.* Sei $I =]0, 1[$, und sei $D(A)$ ein Unterraum von $W^2(I)$. Wir betrachten den Operator in $H = L^2(I)$, der durch $Af = f''$ definiert ist. Man überlegt sich mit Stetigkeitsargumenten und dem Satz von Sobolev, dass die folgenden Anwendungen der partiellen Integration auch für schwache Ableitungen gerechtfertigt sind:

$$\begin{aligned}\langle Af, g \rangle &= \int_0^1 f''g = f'(1)g(1) - f'(0)g(0) - \int_0^1 f'g' \\ &= f'(1)g(1) - f'(0)g(0) - f(1)g'(1) + f(0)g'(0) + \int_0^1 fg'' \\ &= f'(1)g(1) - f'(0)g(0) - f(1)g'(1) + f(0)g'(0) + \langle f, Ag \rangle.\end{aligned}$$

Setzt man also beispielsweise $D(A) = W^2(I)$, so ist A nicht symmetrisch. Setzt man dagegen $D(A) = H_0^2(I)$, so ist A symmetrisch. In diesem Fall gilt $D(A^*) = W^2(I)$, also ist A nicht selbstadjungiert. Vom analytischen Standpunkt sind beide Definitionsbereiche unnatürlich, denn im ersten Fall haben wir keine Randbedingung gestellt, im zweiten dagegen vier, was klar zu viel ist.

20.2. **Definition.** Sei A ein symmetrischer Operator im Hilbertraum H . A heißt *monoton*, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass $\langle Au, u \rangle \geq c\|u\|^2$ für alle $u \in D(A)$.

20.3. **Definition.** A sei ein monotoner Operator im Hilbertraum H . Durch

$$\langle u, v \rangle_E = \langle Au, v \rangle, \quad u, v \in D(A),$$

wird ein Skalarprodukt auf $D(A)$ erklärt. Die Vervollständigung von $(D(A), \|\cdot\|_E)$ ist ein Hilbertraum, der als *energetischer Raum* von A bezeichnet und H_E geschrieben wird.

20.4. **Lemma.** Sei A ein monotoner Operator im Hilbertraum H . Die Einbettung $D(A) \hookrightarrow H$ setzt sich zu einer stetigen Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ fort.

20.5. *Bemerkung.* Da H_E ein dichter Unterraum von H ist, ist H' ein Unterraum von H'_E . Wir wollen dabei H' mit H identifizieren. Das geht kanonisch, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tut man sich leichter, wenn man die Existenz einer konjugiert linearen isometrischen Involution $J: H \rightarrow H$ voraussetzt. In diesem Fall ist nämlich $\langle \cdot, J(\cdot) \rangle$ eine Bilinearform. Falls H ein Funktionenraum ist, kann man $J(f) = \bar{f}$ wählen. Im allgemeinen Fall sei $(b_m)_{m \in M}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H . Dann kann man setzen $J(\sum_{m \in M} x_m b_m) = \sum_{m \in M} \bar{x}_m b_m$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wählt man $J = \text{id}$.

20.6. **Lemma.** Sei A ein monotoner Operator im Hilbertraum H , sei $J: H \rightarrow H$ eine konjugiert lineare isometrische Involution wie in Bemerkung 20.5. Dann wird durch

$$A_E: H_E \rightarrow H'_E, \quad A_E(u)(v) = \langle u, J(v) \rangle_E,$$

ein isometrischer Isomorphismus definiert, der als *Energieerweiterung* von A bezeichnet wird.

Bemerkung. Da die Einbettung $H_E \hookrightarrow H$ dichtes Bild besitzt, ist H' in H'_E eingebettet. Wir identifizieren H' mit H linear isomorph via $T \mapsto u$ für dasjenige u mit $Tv = \langle v, J(u) \rangle$ für alle $v \in H$. Wir definieren die Friedrichssche Erweiterung durch dieselbe Vorschrift wie A_E , aber mit Definitionsbereich $A_E^{-1}(H)$. Die Details behandelt das folgende Lemma.

20.7. Lemma. *Sei A ein monotoner Operator in H . Mit $A_E: H_E \rightarrow H'_E$ werde die Energierweiterung von A bezeichnet. Definiere einen Operator A_F in H durch*

$$D(A_F) = \{u \in H_E \mid A_E u \in H'\}, \quad \langle A_F u, Jv \rangle = A_E(u)(v) \text{ für alle } v \in H_E.$$

Dann ist A_F eine Erweiterung von A , genannt Friedrichssche Erweiterung.

20.8. Theorem (Friedrichs (1934)). *Sei A ein monotoner Operator in einem Hilbertraum H . Dann ist seine Friedrichssche Erweiterung selbstadjungiert.*

Ferner ist $0 \in \rho(A_F)$. Falls die Inklusion $H_E \hookrightarrow H$ kompakt ist, so ist die Resolvente $R(A_F, 0)$ kompakt.

Beweis. Da A_F eine Erweiterung von A ist, ist A_F dicht definiert. Weil $A_E: H_E \rightarrow H'_E$ surjektiv ist, gilt $\text{Bild } A_F = H$. Wegen der Monotonie von A ist $B = A_F^{-1}: H \rightarrow D(A_F)$ stetig. Wegen Lemma 19.14 genügt es zu zeigen, dass B selbstadjungiert ist. Wegen $D(B) = H$ reicht dazu bereits der Nachweis der Symmetrie. Dazu seien $f, g \in H$ gegeben. Setze $u = Bf$ und $v = Bg$. Das bedeutet $A_F(u) = f$ und somit

$$\langle f, Bg \rangle = \langle A_F u, v \rangle = A_E(u)(Jv) = \langle u, v \rangle_E = \langle Bf, Bg \rangle_E.$$

Dasselbe gilt, wenn man f und g vertauscht. Man erhält

$$\langle f, Bg \rangle = \langle Bf, Bg \rangle_E = \overline{\langle Bg, Bf \rangle_E} = \overline{\langle g, Bf \rangle} = \langle Bf, g \rangle.$$

Der letzte Teil der Behauptung ergibt sich aus der folgenden Faktorisierung von A_F^{-1}

$$A_F^{-1}: H \hookrightarrow H'_E \rightarrow H_E \hookrightarrow H_E$$

mit A_E^{-1} in der Mitte und einem kompakten Operator am Schluss. $\square$

20.9. Beispiel. Wir nehmen das Beispiel von oben wieder auf. Betrachte den Operator $f \mapsto -f''$. Wir konstruieren die Friedrichssche Erweiterung für den Definitionsbereich $D(A) = \mathcal{D}(I)$. Dann gilt für $f, g \in D(A)$

$$\langle f, g \rangle_E = \langle f, g \rangle - \int_0^1 f'' g = \langle f, g \rangle + \int_0^1 f' g'.$$

Also stimmt das energetische Skalarprodukt mit dem Skalarprodukt von $W^1(I)$ überein. Daraus folgt $H_E = H_0^1(I)$. Für $f, g \in H_E = H_0^1(I)$ gilt $A_E(f)(g) = \langle f, \bar{g} \rangle_E = \int_0^1 fg + \int_0^1 f' g'$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ gilt also $A_E(f)(\varphi) = \int_0^1 f\varphi - \int_0^1 f\varphi''$. Falls also $A_E(f) \in L^2(I)'$ liegt, so ist $f \in W^2(I)$ und erfüllt $A_E f = f - f''$. Wir haben gezeigt:

$$D(A_F) = H_0^1(I) \cap W^2(I) = \{f \in W^2(I) \mid f(0) = f(1) = 0\}.$$

Das ist ein anderer Raum als $H_0^2(I)$, weil keine Bedingungen an $f'(0)$ und $f'(1)$ gestellt werden. Man sollte in den meisten Fällen gar nicht erst versuchen, $D(A_F)$ auszurechnen.

20.10. *Beispiele.* Wir konstruieren jetzt Laplace-Operatoren. Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^∞ -Rand. Setze $Af = f - \Delta f$.

(a) $D(A) = \mathcal{D}(\Omega)$. Dann folgt aus der Greenschen Identität für $f, g \in D(A)$

$$\langle f, g \rangle_E = \langle f, g \rangle + \langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Also ist das energetische Skalarprodukt äquivalent zum Skalarprodukt auf $W^1(\Omega)$. Daraus folgt $H_E = H_0^1(\Omega)$. Falls also f für ein $g \in L^2(\Omega)$ die Gleichung $A_F f = g$ löst, so gilt $f|_{\partial\Omega} = 0$. Dass $f \in W^2(\Omega)$ gilt, muss dagegen mit analytischen Mitteln gezeigt werden.

Aus dem Rellichschen Einbettungssatz folgt die Kompaktheit von $H_E \hookrightarrow H$. Wir haben also gezeigt, dass es eine unbeschränkt wachsende Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, \infty]$ und ein vollständiges Orthonormalsystem $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega)$ mit $\Delta f_n = -\lambda_n f_n$ und $f_n \in H_0^1(\Omega)$ gibt.

(b) Das Neumannsche Randwertproblem bearbeitet man analog, indem man als Definitionsbereich die Menge $D(A) = \{f \in C^2(\Omega) \mid f'|_{\partial\Omega} = 0\}$ wählt. In diesem Fall erhält man $H_E = W^1(\Omega)$. Man benötigt daher den Rellichschen Einbettungssatz für W^1 .

Man beweist so die Existenz einer unbeschränkt wachsenden Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, \infty]$ und eines vollständigen Orthonormalsystems $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $W^2(\Omega)$ mit $\Delta f_n = -\lambda_n f_n$ und $f_n|_{\partial\Omega} = 0$.

LITERATUR

- [1] Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie*, De Gruyter 1990.
- [2] Dunford, N., Schwartz, J. T.: *Linear Operators*, Wiley, 1958–1971.
- [3] Kalton, N. J., Peck, N. T., Roberts, J. W.: *An F -space sampler*, Cambridge University Press, 1984.
- [4] Körner, T. W.: *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
- [5] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.: *Classical Banach Spaces I*, Springer, 1977.
- [6] Meise, R., Vogt, D.: *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg 1992.
- [7] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*, MacGraw-Hill 1986.
- [8] Taylor, M. E.: *Partial Differential Equations I*, Springer 1997.
- [9] Werner, D.: *Funktionalanalysis*, Springer 2002.