ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III
BLATT 11

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:
 MatrNr: MatrNr:

38. (4 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n$ seien $f_{n,k} = \chi_{(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}$ und

$$(f_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n} = (f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, f_{4,1}, \dots).$$

Untersuchen Sie, ob für $n \rightarrow \infty$

- (a) die Folge $(f_{n,k})$ auf $[0, 1]$ punktweise konvergiert,
- (b) die Folge $(f_{n,k})$ dem Lebesgue-Maß λ_1 nach konvergiert (vgl. Aufgabe 26),
- (c) die Folge der Integrale $\int_{[0,1]} f_{n,k} d\lambda_1$ konvergiert.

Können Sie eine Teilfolge auswählen, die für λ_1 -fast alle $x \in [0, 1]$ konvergiert?

39. (Stirlingsche Formel, 2+1+2+1 Punkte) Für $y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_n(y) = \chi_{(-\sqrt{n}, \infty)}(y) \exp\left(n\left(\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

was für $y \leq -\sqrt{n}$ als $g_n(y) = 0$ zu lesen ist.

- (a) Mit Hilfe der Substitution $y = \frac{x}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ zeige man

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(y) dy = \frac{e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \frac{e^n \Gamma(n+1)}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

- (b) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y)$.
- (c) Bestimmen Sie eine integrierbare Majorante für die g_n . (Hinweis: Für $|x| < 1$ hat man $\ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{6}$, während für $x \geq 1$ gilt $\ln(1+x) - x \leq -\frac{x}{4}$. (Warum?))
- (d) Folgern Sie mit Hilfe des Lebesgueschen Konvergenzsatzes die Stirlingsche Formel, das ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+1)e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}.$$

40. (2 Punkte) Es bezeichne μ das Zählmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ (also es gelte $\mu(A) = \#A$ für $A \in \mathcal{B}_1$) und $A = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x, y) d\lambda_1(x) d\mu(y) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x, y) d\mu(y) d\lambda_1(x).$$

Sind die Voraussetzungen des Satzes von Fubini aus der Vorlesung erfüllt?

Z. (6 Punkte) Gibt es eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$, die $\mathbb{Q}$ umfasst und für die $\lambda_1(\Omega) = 1$ gilt? (Tip: Zwischenwertsatz)

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten, einen guten Übergang ins neue Jahr und eine erholsame vorlesungsfreie Zeit!

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Fr., 10.01.2025, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 15.01.2025 in den Übungen