2.6 Produktmaße und der Satz von Fubini

Def.: Sind $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume, so heißt

$$\mathcal{A} \times \mathcal{C} := \sigma(\mathcal{A} \,\square\, \mathcal{C})$$

die <u>Produkt-σ-Algebra</u> von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ (auf $X \times Y$).

(Hierbei ist $\mathcal{A} \,\square\, \mathcal{C} = \{A \times C : A \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{C}\}$ das $\cap$-System der Rechteck-Mengen.)

Allgemeiner: Sind $(X_i, \mathcal{A}_i)$ für $1 \le i \le n$ messbare Re., so setzt man $\mathcal{A}_1 \,\square \dots \square\, \mathcal{A}_n := \{ \bigtimes_{i=1}^{n} A_i : A_i \in \mathcal{A}_i \}$ und definiert $\bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i := \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n := \sigma(\mathcal{A}_1 \,\square \dots \square\, \mathcal{A}_n)$, die Produkt-$\sigma$-Algebra von endlich vielen σ-Algebren.

Es gilt für $1 \le m < n$: $\bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = (\bigtimes_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i) \times (\bigtimes_{i=m+1}^{n} \mathcal{A}_i)$. (→Ü)

Sind dabei alle $\mathcal{A}_i$ identisch, also $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$, $1 \le i \le n$, so schreibt man $\mathcal{A}^n := \bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$.

<u>Lemma</u> 1: $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$ ist die kleinste σ-Algebra, so dass die Projektionen

$$\pi_1 : X \times Y \to X, \quad (x,y) \mapsto \pi_1(x,y) := x$$

<u>und</u> $$\pi_2 : X \times Y \to Y, \quad (x,y) \mapsto \pi_2(x,y) := y$$

messbar sind.

Bew.: (1) Für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist

$$\pi_1^{-1}(A) = A \times Y \in \mathcal{A} \square \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{C},$$

d.h. π_1 ist $\mathcal{A} \times \mathcal{C}, \mathcal{A}$-messbar. Ebenso ist π_2 $\mathcal{A} \times \mathcal{C}, \mathcal{C}$-messbar.

(2) Umgekehrt sei $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra auf $X \times Y$, so dass π_1 $\mathcal{D}, \mathcal{A}$-messbar und π_2 $\mathcal{D}, \mathcal{C}$-messbar ist. Dann ist für jedes $A \in \mathcal{A}$ $\pi_1^{-1}(A) = A \times Y \in \mathcal{D}$ und ebenso für jedes $C \in \mathcal{C}$ $\pi_1^{-1}(C) = X \times C \in \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ $\cap$-abgeschlossen ist: $A \times C = (A \times Y) \cap (X \times C) \in \mathcal{D}$. Das bedeutet $\mathcal{A} \square \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ und, weil $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra ist, auch $\mathcal{A} \times \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. □

Bsp. 1: $\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_m = \mathcal{B}_{n+m}$ $\quad (\Rightarrow \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_1^n)$

Bew.: Da die Projektionen $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ und $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ stetig sind, sind sie auch $\mathcal{B}_{n+m}, \mathcal{B}_n$- bzw. $\mathcal{B}_{n+m}, \mathcal{B}_m$-messbar. Daher ist nach Lemma 1 $\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_m \subset \mathcal{B}_{n+m}$.

Umgekehrt ist $\mathcal{Q}^{(n+m)} \subset \mathcal{B}_n \square \mathcal{B}_m$ und daher

$$\mathcal{B}_{n+m} = \sigma(\mathcal{Q}^{(n+m)}) \subset \sigma(\mathcal{B}_n \square \mathcal{B}_m) = \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_m.$$

Gilt Entsprechendes auch für die Lebesgue-σ-Algebra $\mathcal{L}_n$? Um diese Frage zu beantworten benötigen wir das folgende

Lemma 2: Es seien $(X,\mathcal{A}),(Y,\mathcal{C})$ messbare Räume und $D\in\mathcal{A}\times\mathcal{C}$. Dann sind für alle $x\in X$ und $y\in Y$ die Schnittmengen

$$D_x := \{y\in Y : (x,y)\in D\}\in\mathcal{C} \qquad \text{und}$$

$$D_y := \{x\in X : (x,y)\in D\}\in\mathcal{A}.$$

Bew.: Das Mengensystem

$$\mathcal{J} := \{D\in\mathcal{A}\times\mathcal{C} : D_x\in\mathcal{C} \text{ und } D_y\in\mathcal{A}\ \forall x\in X, y\in Y\}$$

ist eine σ-Algebra, die $\mathcal{A}\sqcap\mathcal{C}$ enthält. $\square$

Bsp. 2: $\mathcal{L}_n\times\mathcal{L}_m \subsetneqq \mathcal{L}_{n+m}$ $\quad (\Rightarrow (\mathcal{L}_1)^n \subsetneqq \mathcal{L}_n)$

Bew.: "$\subset$" Ist $A\in\mathcal{L}_n$, so existieren $B\in\mathcal{B}_n$ und eine λ_n-Nullmenge $N\subset\mathbb{R}^n$, so dass $A=B+N$. Nun ist $\pi_1^{-1}(B)=B\times\mathbb{R}^m\in\mathcal{B}_{n+m}\subset\mathcal{L}_{n+m}$ und $\pi_1^{-1}(N)=N\times\mathbb{R}^m$ eine λ_{n+m}-Nullmenge, also insbes. $N\times\mathbb{R}^m\in\mathcal{L}_{n+m}$. Damit ist $\pi_1^{-1}(A)=(B\times\mathbb{R}^m)+(N\times\mathbb{R}^m)\in\mathcal{L}_{n+m}$, d.h. $\pi_1:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{L}_{n+m},\mathcal{L}_n$-messbar. Ebenso ist $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{L}_{n+m}, \mathcal{L}_m$-messbar. Nach Lemma 1 gilt also $\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m \subset \mathcal{L}_{n+m}$.

„$\neq$" Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-Lebesgue-messbare Menge, also $N = (N \times \{y\})_y \notin \mathcal{L}_n$, wobei $y \in \mathbb{R}^m$ beliebig ist. Nach Lemma 2 ist dann $N \times \{y\} \notin \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m$, weil $N \times \{y\}$ eine λ_{n+m}-Nullmenge ist und somit $N \times \{y\} \in \mathcal{L}_{n+m}$. (Vgl. Aufg. 20)

Bem.: Die Ungleichung $\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m \subsetneq \mathcal{L}_{n+m}$ verursacht einige Komplikationen, z.B. kann man für $D \in \mathcal{L}_{n+m}$ anstelle von Lemma 2 nur die etwas schwächere Aussage

„Für λ_n-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $D_x \in \mathcal{L}_m$ und für λ_m-fast alle $y \in \mathbb{R}^m$ ist $D_y \in \mathcal{L}_n$."

zeigen. Weitere Konsequenzen aus Bsp. 2 werden wir im folgenden ignorieren und nur für das Endergebnis, das sind die Sätze von Tonelli und Fubini je eine Version für $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{L}_{n+m})$ notieren.

Lemma 3: Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{E}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann ist für jedes $D \in \mathcal{A} \times \mathcal{E}$

(i) die Funktion $x \mapsto \nu(D_x)$ $\mathcal{A}$-messbar und

(ii) die Funktion $y \mapsto \mu(D_y)$ $\mathcal{E}$-messbar.

Bem.: Nach Lemma 2 sind diese Funktionen wohldef..

Bew.: Für $D \in \mathcal{A} \times \mathcal{E}$ definieren wir $f_D(x) := \nu(D_x)$ und

$$\mathcal{S} := \{ D \in \mathcal{A} \times \mathcal{E} : f_D \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar} \}.$$

Fall 1: ν ist endlich

(i) Sind $D^{(1)}, D^{(2)} \in \mathcal{S}$ mit $D^{(1)} \subset D^{(2)}$, so ist

$$f_{D^{(2)}}(x) - f_{D^{(1)}}(x) = \nu((D^{(2)})_x) - \nu((D^{(1)})_x)$$

für alle $x \in X$ definiert (weil ν endlich ist!) und daher $f_{D^{(2)}} - f_{D^{(1)}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Wegen

$$f_{D^{(2)} \setminus D^{(1)}}(x) = \nu((D^{(2)} \setminus D^{(1)})_x) = \nu((D^{(2)})_x \setminus (D^{(1)})_x)$$

$$= \nu((D^{(2)})_x) - \nu((D^{(1)})_x) = f_{D^{(2)}}(x) - f_{D^{(1)}}(x)$$

folgt, dass $D^{(2)} \setminus D^{(1)} \in \mathcal{S}$.

(ii) Sind für $n \in \mathbb{N}$ $D^{(n)} \in \mathcal{S}$ paarweise disjunkt, so ist

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_{D^{(n)}}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu((D^{(n)})_x) = \ldots$$

$$= \nu\Big(\big(\sum_{n\in\mathbb{N}} D^{(n)}\big)_x\Big) = f_{\sum_{n\in\mathbb{N}} D^{(n)}}(x) < \infty$$

und damit $f_{\sum_{n\in\mathbb{N}} D^{(n)}}$ als punktweiser Limes $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen ebenfalls $\mathcal{A}$-messbar. Also ist auch $\sum_{n\in\mathbb{N}} D^{(n)} \in \mathcal{S}$.

Mit (i) und (ii) ist gezeigt, dass $\mathcal{S}$ ein Dynkin-System ist.

(iii) Ist $D = A \times C \in \mathcal{A} \,\square\, \mathcal{C}$, so ist

$$f_D(x) = \nu((A\times C)_x) = \nu(C)\cdot \chi_A(x),$$

also f_D $\mathcal{A}$-messbar. Es folgt $\mathcal{A} \,\square\, \mathcal{C} \subset \mathcal{S}$.

Da $\mathcal{S}$ ein $\cap$-System ist, gilt

$$D(\mathcal{S}) \underset{\uparrow}{=} \sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{A}\,\square\,\mathcal{C}) = \mathcal{A}\times\mathcal{C}.$$

Abschnitt 2.1, Satz 4

Fall 2: ν ist σ-endlich.

Es seien $Y_n \in \mathcal{C}$ mit $Y = \sum_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ und $\nu(Y_n) < \infty$.

Wir setzen $\nu_n(C) := \nu(C \cap Y_n)$. Dann sind nach Fall 1 für jedes $D \in \mathcal{A}\times\mathcal{C}$ die Funktionen

$$x \longmapsto \nu_n(D_x) \qquad (n\in\mathbb{N})$$

$\mathcal{A}$-messbar. Gleiches gilt für $x \longmapsto \nu(D_x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_n(D_x)$ als punktweisem Limes $\mathcal{A}$-messbarer Fkten. $\square$

Satz 1 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das Produktmaß)

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann existiert genau ein Maß $\pi : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to [0,\infty]$ mit

$$\pi(A \times C) = \mu(A)\,\nu(C) \qquad \forall A \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{C} \qquad (*)$$

Das Maß π ist σ-endlich und für alle $D \in \mathcal{A} \times \mathcal{C}$ gilt

$$\pi(D) = \int \nu(D_x)\, d\mu(x) = \int \mu(D_y)\, d\nu(y). \qquad (**)$$

Bew.: (1) Existenz: Für $D \in \mathcal{A} \times \mathcal{C}$ definieren wir

$$\pi(D) := \int \nu(D_x)\, d\mu(x).$$

Nach Lemma 3 ist $\pi(D)$ wohldefiniert.

(i) Wir zeigen: $\pi : \mathcal{A} \times \mathcal{C} \to [0,\infty]$ ist ein Maß.

Offenbar ist $\pi(\emptyset) = \int 0\, d\mu(x) = 0$. Sind für $n \in \mathbb{N}$ $D^{(n)} \in \mathcal{A} \times \mathcal{C}$ paarweise disjunkt, so erhalten wir

$$\pi\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} D^{(n)}\Big) \underset{\text{Def}}{=} \int \nu\Big(\big(\sum_{n\in\mathbb{N}} D^{(n)}\big)_x\Big)\, d\mu(x)$$

ν ist ein Maß

$$= \int \nu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} (D^{(n)})_x\Big)\, d\mu(x) = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu((D^{(n)})_x)\, d\mu(x)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int \nu((D^{(n)})_x)\, d\mu(x) \underset{\text{Def.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \pi(D^{(n)})$$

Beppo Levi

(ii) Wir zeigen: Für π wie oben gilt $(*)$.

$$\pi(A\times C) \underset{\text{Def}}{=} \int \nu((A\times C)_x)\, d\mu(x)$$

$$= \int \nu(C)\cdot \chi_A(x)\, d\mu(x) = \mu(A)\,\nu(C).$$

(2) Eindeutigkeit: $\mathcal{A} \square \mathcal{C}$ ist ein $\cap$-System, welches $\mathcal{A}\times\mathcal{C}$ erzeugt. Sind $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit $\mu(X_n)<\infty\ \forall n\in\mathbb{N}$ und $Y = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Y_m$ mit $\nu(Y_m)<\infty\ \forall m\in\mathbb{N}$, so ist $X\times Y = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} X_n \times Y_m$, und für jedes Maß $\tau : \mathcal{A}\times\mathcal{C}\to[0,\infty]$ mit $\tau(A\times C) = \mu(A)\,\nu(C)\ \ \forall A\in\mathcal{A}, C\in\mathcal{C}$ ist

$$\tau(X_n\times Y_m) = \mu(X_n)\,\nu(Y_m) < \infty \quad \forall n,m\in\mathbb{N},$$

d.h. τ ist auf $\mathcal{A}\square\mathcal{C}$ σ-endlich. Nach dem Eindeutigkeitssatz für Maßerweiterungen ist daher $\pi : \mathcal{A}\times\mathcal{C}\to[0,\infty]$ eindeutig bestimmt.

(3) Zur zweiten Gleichung in (**): Setzen wir

$$\tilde{\pi}(D) := \int \mu(D_y)\, d\nu(y),$$

so ist dies nach den Argumenten in (1) ebenfalls ein Maß auf $\mathcal{A}\times\mathcal{C}$, für das (*) gilt. Mit der Eindeutigkeit folgt $\pi = \tilde{\pi}$, d.h.

$$\int \nu(D_x)\, d\mu(x) = \int \mu(D_y)\, d\nu(y) \quad \forall D\in\mathcal{A}\times\mathcal{C}.$$

$\square$

Bem. und Bsp.:

(1) Die σ-Endlichkeit der Maßräume $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{C},\nu)$ ist über das Lemma 3 auch in den Existenzteil des Beweises eingeflossen.

(2) <u>Def.</u>: Sind $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{C},\nu)$ Maßräume, so heißt ein Maß $\pi : \mathcal{A}\times\mathcal{C} \to [0,\infty]$ mit

$$\pi(A\times C) = \mu(A)\nu(C) \quad \forall A\in\mathcal{A}, C\in\mathcal{C} \qquad (*)$$

ein <u>Produktmaß</u> von μ und ν. Wenn ein solches existiert und eindeutig bestimmt ist, <u>wird</u> es <u>mit</u> $\underline{\mu\times\nu}$ <u>bezeichnet</u>.

(3) $(*)$ heißt die <u>charakterisierende Gleichung</u> für Produktmaße.

(4) In $(**)$ können wir mit $f_D(x) = \nu(D_x)$ (vgl. Lemma 3) auch schreiben $\pi(D) = \mu[f_D]$ und so die Funktionalschreibweise beibehalten. Sehr suggestiv ist das nicht.

(5) Mit $(**)$ erhalten wir die allgemeine Version des Cavalierischen Prinzips für Produktmaße.

(6) Bspe.:

(i) $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ und $(Y,\mathcal{C},\nu) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m, \lambda_m)$

Dann ist das Produktmaß gegeben durch

$$\lambda_n \times \lambda_m = \lambda_{n+m}\Big|_{\mathcal{L}_n\times\mathcal{L}_m} : \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m \longrightarrow [0,\infty]$$

Vervollständigt man $\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m$ bezüglich λ_{n+m}, so gelangt man zum Erwarteten $\lambda_{n+m} : \mathcal{L}_{n+m} \longrightarrow [0,\infty]$.

(ii) $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathcal{Y},\mathcal{E},\nu) = (\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$, wobei μ das Zählmaß ist. Dann ist

- $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, denn $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \,\square\, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ enthält die Einpunktmengen $\{(m,n)\}$ für $m,n\in\mathbb{N}$. Da $\mathbb{N}^2$ abzählbar ist, gilt $\sigma\{\{(m,n)\} : m,n\in\mathbb{N}\} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$
- das Produktmaß $\mu\times\mu$ gerade das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, denn $\mu\times\mu(\{(m,n)\}) = \mu(\{m\})\mu(\{n\}) = 1$, der Rest ergibt sich aus der σ-Additivität.

<u>Bez.</u>: Es sei $f : X\times\mathcal{Y} \to Z$ eine Funktion. Für $x\in X$ und $y\in\mathcal{Y}$ definieren wir die Schnittfunktionen

$$f_x : \mathcal{Y} \longrightarrow Z, \quad y \longmapsto f_x(y) := f(x,y)$$

und $$f_y : X \longrightarrow Z, \quad x \longmapsto f_y(x) := f(x,y).$$

Lemma 4: Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Die Funktion
$$f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}; \quad (x,y) \longmapsto f(x,y)$$
sei $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$-messbar. Dann sind für alle $x \in X$ $f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{C}$-messbar und für alle $y \in Y$ $f_y : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar.

Bew.: Es sei $B \in \overline{\mathcal{B}}$. Dann ist einerseits
$$(f_x)^{-1}(B) = \{y \in Y : f_x(y) \in B\} = \{y \in Y : f(x,y) \in B\}$$
und andererseits
$$(f^{-1}(B))_x = \{y \in Y : (x,y) \in f^{-1}(B)\} = \{y \in Y : f(x,y) \in B\},$$
also $(f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x \in \mathcal{C}$ nach Lemma 2, da nach Vor. $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{C}$. Ebenso: $(f_y)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ $\forall y \in Y$. □

Satz von Tonelli (auch: Satz von Fubini für nichtnegative messbare Funktionen): Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $f: X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$-messbar. Dann ist die Funktion
$$g: X \longrightarrow [0,\infty], \quad x \longmapsto g(x) := \nu[f_x]$$
$\mathcal{A}$-messbar, die Funktion
$$h: Y \longrightarrow [0,\infty]; \quad y \longmapsto h(y) := \mu[f_y]$$
$\mathcal{C}$-messbar, und es gilt
$$\mu \times \nu[f] = \mu[g] = \nu[h].$$

Bem.: Ausgeschrieben mit Integralzeichen lautet die Beh.

$$\int f(x,y)\, d(\mu\times\nu)(x,y) = \int\left(\int f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)$$

$$= \int\left(\int f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Bew.: Es sei $\mathcal{F}$ das System aller Fktn. $f\in \mathcal{M}^+(X\times Y, \mathcal{A}\times\mathcal{C})$, für die die Beh. gilt. Nach Lemma 3 sind für alle $D\in\mathcal{A}\times\mathcal{C}$ die Funktionen

$x\longmapsto \nu(D_x)=\nu[\chi_{D_x}]$ $\mathcal{A}$-messbar und

$y\longmapsto \mu(D_y)=\mu[\chi_{D_y}]$ $\mathcal{C}$-messbar

und nach Satz 1 gilt $\mu\times\nu[\chi_D]=\mu[\nu[\chi_{D_x}]]=\nu[\mu[\chi_{D_y}]]$, also die behauptete Identität für die Integrale. D.h.: $\forall D\in\mathcal{A}\times\mathcal{C}$ ist $\chi_D\in\mathcal{F}$.

Sind $f^{(1)}, f^{(2)}\in\mathcal{F}$ und $\alpha,\beta\geq 0$, so ist aufgrund der Linearität des Integrals nach einem Maß auch $\alpha f^{(1)}+\beta f^{(2)}\in\mathcal{F}$. Damit ist $\mathcal{E}^+(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{C})\subset\mathcal{F}$.

Nun seien für $n\in\mathbb{N}$ $f_n\in\mathcal{F}$ mit $f_n\nearrow f: X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$. Dann gelten $(f_n)_x\nearrow f_x$, $(f_n)_y\nearrow f_y$ und daher auch

$g_n(x):=\nu[(f_n)_x]\nearrow\nu[f_x]=:g(x)$ sowie

$h_n(y):=\mu[(f_n)_y]\nearrow\mu[f_y]=:h(y)$.

Also sind g $\mathcal{A}$-messbar und h $\mathcal{C}$-messbar als

punktweise Limites entsprechend messbarer Funktionen.
Schließlich liefert der Satz von B. Levi:

$$\mu \times \nu\,[f] = \lim_{n\to\infty} \mu \times \nu\,[f_n] = \lim_{n\to\infty} \mu[g_n] = \mu[g]$$

und ebenso $\mu \times \nu\,[f] = \nu[h]$.

Damit ist $\mathcal{F} = \mathcal{M}^+(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{C})$. $\square$

Bem. zum Gebrauch: Insbes. ist $f \in \mathcal{M}^+$ integrierbar, wenn eines der drei im Satz genannten Integrale (und damit alle) endlich ist. $\S$

Damit kommen wir zum Hauptergebnis dieses Abschnitts:

Satz von Fubini: Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{C}, \mu \times \nu)$. Dann ist für μ-fast alle $x \in X$ die Funktion f_x ν-integrierbar und die Funktion

$$g : X \to \overline{\mathbb{R}},\ x \mapsto g(x) := \begin{cases} \nu[f_x], & \text{falls } f_x\ \nu\text{-integrierbar ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist μ-integrierbar. Es gilt $\mu \times \nu\,[f] = \mu[g]$.

Bew.: Es ist $(f^{\pm})_x = (f_x)^{\pm}$. Nach dem Satz von Tonelli sind die Funktionen

$$g^{\pm} : X \to [0,\infty],\ x \mapsto g^{\pm}(x) := \nu[(f^{\pm})_x]$$

$\mathcal{A}$-messbar und es gilt $\mu \times \nu\,[f^{\pm}] = \mu[g^{\pm}]$.
Da $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{C}, \mu \times \nu)$ vorausgesetzt ist, sind

$$\mu[g^{\pm}] = \mu \times \nu\,[f^{\pm}] < \infty \qquad \left(\Rightarrow g := g^+ - g^- \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \right)$$

und daher $g^{\pm}$ μ-fast überall endlich. D.h.:

$(f^\pm)_x$ sind ν-integrierbar für μ-fast-alle $x \in X$. (Dasselbe gilt dann auch für $f_x = f_x^+ - f_x^-$.) Mit der Definition des Integrals erhalten wir:

$$\mu \times \nu[f] = \mu \times \nu[f^+] - \mu \times \nu[f^-]$$
$$= \mu[g^+] - \mu[g^-] = \mu[g]. \qquad \square$$

Bem.: Entsprechend gilt: Für ν-fast alle $y \in Y$ ist die Funktion f_y μ-integrierbar und die Fkt.

$$h : Y \to \overline{\mathbb{R}},\ y \mapsto h(y) := \begin{cases} \mu[f_y], & \text{falls } f_y\ \mu\text{-integrierbar ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ν-integrierbar. Es gilt $\mu \times \nu[f] = \nu[h]$.

Modifikationen für Lebesgue-integrierbare Funktionen: Die Sätze von Tonelli und Fubini kann man natürlich mit den Maßräumen $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m, \lambda_m)$ anwenden und erhält die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge für $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m)$ bzw. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_m, \lambda_{n+m})$. Will man für den Satz von Tonelli $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{L}_{n+m})$ zulassen, so ist dieser Satz wie folgt abzuschwächen:

Sei $f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{L}_{n+m})$. Dann gibt es eine λ_n-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in N^c$ die Funktion f_x $\mathcal{L}_m$-messbar ist. Die Funktion (130)

$$g : \mathbb{R}^n \to [0,\infty],\ x \mapsto g(x) := \lambda_m [f_x \chi_{N^c}(x)]$$

ist $\mathcal{L}_n$-messbar und es gilt $\lambda_{n+m}[f] = \lambda_n[g]$.

(Entsprechend auch mit f_y und h statt mit f_x und g.)

Die Aussage des Satzes von Fubini, bei dem man ähnlich die Schnittfunktion f_x wie oben auf einer Nullmenge abändert, bleibt auch mit der Voraussetzung $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{L}_{n+m}, \lambda_{n+m})$ unverändert gültig.

Anwendungen:

(1) Der Doppelreihensatz: Die Integration einer "Funktion" $(a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ nach dem Zählmaß μ_2 auf $\mathbb{N}^2$ ist nichts anderes als die Summation der Reihe

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{nm}$$

ohne Beachtung der Reihenfolge. (Diese entspricht einer Wahl der approximierenden Folge von "Treppenfunktionen", und dass der Reihenwert hiervon nicht abhängt, haben wir uns für $a_{nm} \geq 0$ $\forall n,m \in \mathbb{N}$

klargemacht – das war die Wohldefiniertheit des Integrals für nichtnegative meßbare Funktionen.)

Ist μ_1 das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, so ist

$$\mu_1 \times \mu_1 = \mu_2 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \longrightarrow [0,\infty],$$

und die Sätze von Tonelli und Fubini sind in dieser Situation anwendbar und liefern

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{nm} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} a_{nm} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{nm},$$

wenn:

(i) $a_{n,m} \geq 0 \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$ (Tonelli; Meßbarkeit ist immer gegeben) oder

(ii) $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} |a_{nm}| < \infty$, d.h. wenn die Reihe $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{nm}$ absolut konvergiert. (Fubini)

(Auf so interessante Phänomene wie bedingte Konvergenz oder Abhängigkeit des Wertes einer Reihe von der Summationsreihenfolge verzichtet man in der Maß- und Integrationstheorie vollständig.)

Allgemeiner: Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ eine Folge mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ oder mit $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |a_k| < \infty$, so gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k = \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \sum_{k_2\in\mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_n\in\mathbb{Z}} a_k,$$ wobei die Reihenfolge der Summen nach Belieben vertauscht werden kann.

(2) Die Faltung: Es seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ und

$$h : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad (x,y) \longmapsto h(x,y) := f(x)g(y).$$

Dann ist h $\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_n$-messbar, denn die Abbildungen

$$(x,y) \longmapsto f(x) = f \circ \pi_1(x,y) \qquad \text{und}$$
$$(x,y) \longmapsto g(y) = g \circ \pi_2(x,y)$$

sind $\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_n$-messbar und das Produkt messbarer Fktn. ist in gleicher Weise messbar. Der Satz von Tonelli zeigt

$$\int |h(x,y)| \, d\lambda_{2n}(x,y) = \int |f(x)| \, d\lambda_n(x) \int |g(y)| \, d\lambda_n(y) < \infty,$$

also $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_n, \lambda_{2n})$. Hierauf wendet man die Transformationsformel an mit

$$T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (x,y) \longmapsto T(x,y) := (x-y, y).$$

Hierfür ist $\det DT(x,y) = \det \begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = 1$, also $h \circ T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_n, \lambda_{2n})$, wobei

$$h \circ T(x,y) = f(x-y)g(y).$$

Nach dem Satz von Fubini ist dann für λ_n-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$y \longmapsto f(x-y)g(y) = (h \circ T)_x(y)$$

in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ und schließlich die Funktion

$$f * g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad x \longmapsto f*g(x) := \int f(x-y)g(y) \, d\lambda_n(y)$$

in $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$.

Def.: Für $f, g \in \mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ heißt die Funktion

$$f*g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto f*g(x) := \int f(x-y)g(y)\,d\lambda_n(y)$$

die <u>Faltung von f und g</u>. Die Abbildung

$$* : \mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1 \to \mathcal{L}^1, \quad (f,g) \mapsto f*g$$

heißt das <u>Faltungsprodukt</u> oder kurz: die <u>Faltung</u>.

Bem.: (1) Das Faltungsprodukt ist assoziativ und kommutativ.

(2) Faltung und Addition von Funktionen verhalten sich distributiv.

(3) (1)+(2) $\Rightarrow$ $(\mathcal{L}^1, +, *)$ ist ein kommutativer Ring bzw. (da $\mathcal{L}^1$ ein Vektorraum ist) eine Algebra.

(4) In $\mathcal{L}_1$ gibt es kein Einselement der Faltung.

(Bew. dieser Aussagen ggf. z.T. in den Übungen.)

Lemma 5: Es gilt

$$\int |f*g(x)|\,d\lambda_n(x) \leq \int |f(x)|\,d\lambda_n(x) \int |g(y)|\,d\lambda_n(y)$$

mit Gleichheit, wenn $f, g \geq 0$.

Beweis: $\int |f*g(x)|\,d\lambda_n(x) \leq \int \int |f(x-y)g(y)|\,d\lambda_n(y)\,d\lambda_n(x)$

$$\underset{\text{Tonelli}}{=} \int \left(\int |f(x-y)|\,d\lambda_n(x) \right) |g(y)|\,d\lambda_n(y)$$

$$\underset{\text{Translationsinvarianz}}{=} \int |f(x)|\,d\lambda_n(x) \cdot \int |g(y)|\,d\lambda_n(y).$$

Als praktische Anwendung stellen wir einen Zusammenhang her zwischen der Γ-Funktion

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

und der Eulerschen Beta-Funktion

$$B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt,$$

vgl. Übungen zur Ana II (SoSe 20), Aufg. 7.

Lemma 6: Für $x,y>0$ gilt $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\, B(x,y)$.

Bew.: Wir fixieren $x, y > 0$ und setzen

$$f(t) = \chi_{(0,\infty)}(t)\, t^{x-1} e^{-t}, \qquad g(s) = \chi_{(0,\infty)}(s)\, s^{y-1} e^{-s}.$$

Dann ist

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt \cdot \int_{\mathbb{R}} g(s)\,ds \overset{\text{Lemma 5}}{=} \int_{\mathbb{R}} f*g(t)\,dt,$$

wobei

$$f*g(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,\infty)}(t-s)(t-s)^{x-1} e^{-(t-s)} \chi_{(0,\infty)}(s) e^{-s} s^{y-1}\, ds$$

$$= \chi_{(0,\infty)}(t) e^{-t} \cdot \int_0^t (t-s)^{x-1} s^{y-1}\, ds$$

Subst.: $s = tz$, $ds = t\,dz$, $(t-s)^{x-1} = t^{x-1}(1-z)^{x-1}$,

$s^{y-1} = t^{y-1} z^{y-1}$, $z \in (0,1)$

$$\ldots = \chi_{(0,\infty)}(t)\, t^{x+y-1} \cdot e^{-t} \cdot \int_0^1 (1-z)^{x-1} z^{y-1}\, dz$$

$$= \chi_{(0,\infty)}(t)\, t^{x+y-1} \cdot e^{-t}\, B(x,y).$$

Integration über $t \in \mathbb{R}$ ergibt die Beh. $\square$

Bildet man das punktweise Produkt zweier Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, so müssen beide Faktoren in $C^k(\Omega)$ sein, damit dies auch für das Produkt gilt. Anders beim Faltungsprodukt: Hier ist $f * g$ so glatt (oder regulär) wie der "bessere" der beiden Faktoren. Um diese Aussage zu präzisieren, definieren wir:

Def.: Es sei (X, τ) ein top. Raum.

(a) Für eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \subset X$$

der <u>Träger</u> von f (engl.: <u>support</u>).

(b) $C_c(X) := \{f \in C(X) : \operatorname{supp} f \text{ ist kompakt}\}$ ist der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger.

(c) Für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist

$$C_c^k(\Omega) := C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega)$$

der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

Bsp.: In der Analysis I haben wir uns davon überzeugt, dass die Funktion

$$t \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist. Setzen wir hierin $t = 1-|x|^2$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, so erhalten wir mit

$$K_F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto K_F(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

eine Funktion $K_F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, deren Träger

$$\operatorname{supp} K_F = \overline{B_1(0)}$$

kompakt ist. Also: $K_F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Satz 2: Es seien $f \in \mathcal{L}^1_* := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n; \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ und, für ein $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, und für jeden Multiindex $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ der Länge $|\alpha| \leq k$ gilt $D^\alpha(f*g) = f * D^\alpha g$. (Hierbei ist $D^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$.)

Bew.: Per Induktion über k, beginnend mit $k=0$. Hier ist die Stetigkeit von $f*g$ zu zeigen. Dazu seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $(x_j)_j$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ sowie $f_j(y) := f(y) g(x_j - y)$. Dann folgt aus $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, dass

(i) $\lim_{j\to\infty} f_j(y) = f(y)\, g(x-y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$ und

(ii) $S := \sup\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$ & $|f_j| \leq S \cdot |f| \in \mathcal{L}^1$.

Damit sind die Voraussetzungen des Lebesgueschen Konvergenzsatzes gegeben und wir erhalten

$$f*g(x) = \int f(y)\, g(x-y)\, dy = \int \lim_{j\to\infty} f_j(y)\, dy$$

$$\underset{\text{Lebesgue}}{=} \lim_{j\to\infty} \int f(y)\, g(x_j - y)\, dy = \lim_{j\to\infty} f*g(x_j).$$

Für den Induktionsschluss $k \to k+1$ reicht es zu zeigen, dass für eine C_c^1-Funktion g gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f*g(x+he_\ell) - f*g(x)\big) \overset{(!)}{=} \int f(y)\, \frac{\partial g}{\partial x_\ell}(x-y)\, dy\,.$$

Nun ist

$$\frac{1}{h}\big(f*g(x+he_\ell) - f*g(x)\big) = \int f(y)\, \frac{1}{h}\big(g(x+he_\ell - y) - g(x-y)\big)\, dy.$$

Für $h \to 0$ konvergieren die Integranden punktweise gegen $f(y)\, \frac{\partial g}{\partial x_\ell}(x-y)$ und sind nach dem MWS majorisiert durch $|f| \cdot \sup\{|\frac{\partial g}{\partial x_\ell}(\xi)| : \xi \in \mathbb{R}^n\} \in \mathcal{L}^1$. Also führt der Lebesguesche Konvergenzsatz auch hier zum Ziel. $\square$

Die gerade bewiesene Eigenschaft der Faltung kann man dazu benutzen, lediglich integrierbare Funktionen durch glatte (=differenzierbare) Funktionen zu approximieren. Dazu eine Vorbere

Def.: Eine Familie $(k_\delta)_{0<\delta<\delta_0}$ von Funktionen $k_\delta \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ heißt eine approximative Einheit, falls gilt

(i) $\exists M > 0 \; \forall \delta \in (0, \delta_0): \int_{\mathbb{R}^n} |k_\delta(x)| dx \le M$;

(ii) $\forall \delta \in (0, \delta_0): \int_{\mathbb{R}^n} k_\delta(x) dx = 1$;

(iii) $\forall \delta > 0: \lim_{\delta \to 0} \int_{|x|>\delta} |k_\delta(x)| dx = 0$.

Bem.: Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind approximative Einheiten leicht herzustellen: Man wählt $k \in \mathcal{L}^1$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} k(x) dx = 1$ und setzt $k_\delta(x) := \delta^{-n} k\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Dann sind die geforderten Eigenschaften (i) – (iii) mit Hilfe der Transformationsformel leicht zu überprüfen, was zur Übung empfohlen sei. Insbes. kann man

$$k := \frac{k_E}{\int_{\mathbb{R}^n} k_E(x) dx} \quad \text{mit} \quad k_E(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , |x| < 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

wählen (wie in unserem letzten Beispiel) und erhält eine approximative Einheit aus C_c^∞-Funktionen. Eine solche wird auch als <u>„Friedrichs-mollifier"</u> bezeichnet (nach Kurt Otto Friedrichs, 1901 – 1982).

Der Name 'approximative Einheit' wird gerechtfertigt durch den folgenden

<u>Satz 3</u>: Es seien $(k_\delta)_{0<\delta<\delta_0}$ eine approximative Einheit und $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\mathcal{L}_n$-messbar. Dann gelten:

(1) $\lim_{\delta\to 0} k_\delta * f(x) = f(x)$ in jedem Stetigkeitspunkt $x \in \mathbb{R}^n$ von f;

(2) ist f gleichmäßig stetig, so gilt $\lim_{\delta\to 0} k_\delta * f = f$ mit gleichmäßiger Konvergenz;

(3) ist f auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetig und $K \subset \Omega$ kompakt, so gilt $\lim_{\delta\to 0} k_\delta * f = f$ gleichmäßig auf K.

(Hierbei ist natürlich ebenfalls $k_\delta * f(x) = \int k_\delta(x-y) f(y)\,dy$ definiert, auch wenn f nicht als integrierbar vorausgesetzt ist.)

<u>Bew.</u>: Wir zeigen exemplarisch den schwierigsten Fall, das ist (3). (1) und (2) erhält man mit ähnlichen Argumenten.

Sei $\delta_0 := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Dann ist auch $K_{\delta_0} := K + \overline{B_{\delta_0}}(0) \subset \Omega$ und kompakt, so dass f auf K_{δ_0} gleichmässig stetig ist. Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $M > 0$

die Schranke aus Teil (1) der Def. einer approximativen Einheit. Dann gibt es ein $\delta \in (0,\delta_0)$, so dass

$$|f(s)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \forall s,t \in K_{\delta_0} \text{ mit } |s-t|<\delta.$$

Mit $S := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$ erhalten wir

$$|K_\varrho * f(x) - f(x)| \underset{(2)}{\leq} \int |K_\varrho(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy$$

$$= \Big(\int_{B_\delta(0)} + \int_{B_\delta(0)^c}\Big)\big(|K_\varrho(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy =: I_\varrho(x) + II_\varrho(x)$$

Dann ist

$$\sup_{x\in K} I_\varrho(x) \leq \frac{\varepsilon}{M}\cdot \int_{|y|<\delta} |K_\varrho(y)|\,dy \leq \varepsilon$$

und

$$\sup_{x\in K} II_\varrho(x) \leq 2S \cdot \int_{|y|>\delta} |K_\varrho(y)|\,dy \longrightarrow 0 \ (\varrho \to 0)$$

und daher

$$\lim_{\varrho\to 0} \sup_{x\in K} |f * K_\varrho(x) - f(x)| \leq \varepsilon \implies \text{Beh.} \quad \square$$

Approximative Einheiten haben sich als äußerst nützliches analytisches Hilfsmittel erweisen. Im nächsten Abschnitt werden wir noch einmal darauf zurückkommen.