Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Dr. Axel Grünrock

WS 2016/2017
23.12.2016
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

37. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}.$$

(a) Beweisen Sie, dass P genau eine kritische Stelle (x_0, y_0) besitzt, und bestimmen Sie diese.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorschen Formel (*ohne* zusätzliche Grenzwertbetrachtungen), dass in (x_0, y_0) ein isoliertes globales Minimum der Funktion P vorliegt.

38. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und ihren Typ für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = xy \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

In welchen Fällen handelt es sich um globale Extrema?

39. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2).$$

(a) Berechnen Sie $\nabla P(x, y)$ und zeigen Sie, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von P ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hess}P(0, 0)$ positiv semidefinit ist und dass in $(0, 0)$ *kein* lokales Extremum vorliegt.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ die Funktion $\varphi_h : t \mapsto P(th_1, th_2)$ in 0 ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

Bitte wenden!

40. Für $n \geq 2$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien k_i und α_i positive reelle Zahlen und

$$G : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto G(x) := \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i.$$

Zeigen Sie: Ist $|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 1$, so besitzt G

(a) *weder* ein globales Extremum,

(b) *noch* ein lokales Extremum.

Hinweis, insbesondere zu Teil (b): Für den Fall $|\alpha| < 1$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass G ein isoliertes globales Maximum besitzt. Teilergebnisse aus dieser Diskussion können Sie zur Lösung der Aufgabe verwenden.

Wir wünschen Ihnen ein schönes Weihnachtsfest, einen guten Übergang ins neue Jahr und eine erholsame Ferienzeit.

Abgabe: Fr., 13.01.2017, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 18.01.2017 und Do., 19.01.2017