Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020, 4. Tutorium am 15.05.20

Hallo zusammen,

viele von Ihnen werden vermutlich im Moment damit beschäftigt sein, sich auf die eine oder andere der verschobenen Nachklausuren vorzubereiten. Das können wir zum Anlass nehmen, hier im Tutorium ein wenig das Tempo zu drosseln und sehr konkrete Hilfestellungen zum aktuellen Aufgabenblatt 4 zu geben. Dementsprechend gibt es heute zwei Aufgaben, die erste zielt auf die Übungsaufgabe 14 ab, die zweite ist ein wenig abstrakter und geht in die Richtung der Übungsaufgabe 15. In beiden Fällen geht es um die Stetigkeit bzw. gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen zwischen metrischen Räumen.

Ergänzungen auf den Seiten 5, 6, 7 und 10.

Erste Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto f(x) := x \tanh(|x|)$$

auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit. (Hierbei sei der $\mathbb{R}^n$ wie üblich mit der Euklidischen Norm $|x| = \big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{\frac{1}{2}}$ ausgestattet.)

Einstieg

Zur Feststellung der Stetigkeit von f ist keinerlei Rechnung erforderlich. Man muss sich nur kurz Gedanken machen über die Struktur von f (Produkt, Verknüpfung von ...?), um mit bekannten Sätzen zum Ziel zu kommen.

Für die Untersuchung auf *gleichmäßige* Stetigkeit sollten Sie versuchen, eine Lipschitz-Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

herzuleiten. Die Kenntnis der grundlegenden Eigenschaften des Tangens Hyperbolicus kann dabei nicht schaden.

Zur Stetigkeit

Bekanntlich ist die Norm $x \mapsto |x|$ stetig (vgl. 2. Aufgabe) und daher auch die Abbildung $x \mapsto \tanh(|x|)$, da es sich um die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen handelt. Schließlich wird noch mit der ebenfalls stetigen identischen Abbildung auf dem $\mathbb{R}^n$ multipliziert, was der Stetigkeit keinen Abbruch tut.

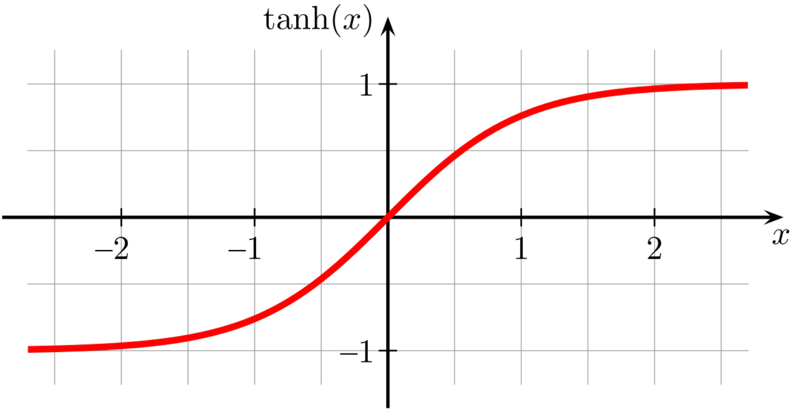
Hinweis zur gleichmäßigen Stetigkeit

Man addiert eine “nahrhafte Null” in der Form

$$f(x) - f(y) = (x - y) \tanh |x| + |y|(\tanh |x| - \tanh |y|)$$

und wendet die Dreiecksungleichung an. Ist der hyperbolische Tangens beschränkt? In der Graphenskizze ...

Hinweis zur gleichmäßigen Stetigkeit



... erscheint das jedenfalls so. Für den zweiten Beitrag können Sie o. E. $|y| \leq |x|$ annehmen. Anschließend bringt der Mittelwertsatz Sie weiter.

Zweite Aufgabe - Vorbetrachtung

In der Vorlesung haben Sie - so hoffe ich jedenfalls - gelernt, die Ungleichung

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|,$$

die eine einfache Folgerung aus der Dreiecksungleichung ist, zu interpretieren als die Lipschitzstetigkeit der Norm, also der Abbildung

$$\| \quad \| : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|,$$

wobei $(V, \| \quad \|)$ ein normierter Vektorraum ist. Die Lipschitzkonstante ist hier $L = 1$.
Fast dasselbe gilt für eine Metrik bzw. einen metrischen Raum, man muss sich allerdings darüber im Klaren sein, dass die Metrik auf dem kartesischen Produkt $X \times X$ definiert ist.

Zweite Aufgabe - Formulierung und Einstieg

Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d) mit einer Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass d Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$ ist.

Erinnern Sie sich:

Zweite Aufgabe - Formulierung und Einstieg

Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d) mit einer Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass d Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$ ist.

Erinnern Sie sich:

(1) Durch welche Metrik δ wird $X \times X$ zu einem metrischen Raum?

Zweite Aufgabe - Formulierung und Einstieg

Gegeben sei ein metrischer Raum (X, d) mit einer Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass d Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L = 1$ ist.

Erinnern Sie sich:

(1) Durch welche Metrik δ wird $X \times X$ zu einem metrischen Raum?

(2) Welche Ungleichung ist zum Beweis der Behauptung zu zeigen?

Die Produktmetrik

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so wird auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ durch

$$\delta((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$$

eine Metrik erklärt. Diese wird als Produktmetrik bezeichnet. Im vorliegenden Fall haben wir $X = Y$ und $d_X = d_Y$, so dass sich diese zu

$$\delta((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$$

vereinfacht. Die geforderte Lipschitz-Abschätzung lautet hiermit

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq \delta((x, y), (x', y')).$$

Um diese zu zeigen, sollten Sie die Symmetrieeigenschaft einer Metrik und die Dreiecksungleichung verwenden.