3. Die Fourier-Restriktions-Norm-Methode

(Bourgain '93, ähnlich: Klainerman-Machedon '93)

Dabei handelt es sich um eine Methode zur Behandlung des allgemeinen Cauchy-Problems $u(t=0)=u_0 \in H^s$ für die Gleichung

$$u_t - i\varphi(-i\nabla)u = N(u)$$

mit reeller Phasenfunktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Lösung der homogenen linearen Gleichung sei wieder mit

$$U_\varphi(t)u_0$$

bezeichnet, als Fourier-Multiplikator

$$U_\varphi(t) = \mathcal{F}_x^{-1} e^{it\varphi(\xi)} \mathcal{F}_x .$$

$(U_\varphi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine unitäre Gruppe auf jedem H^s-Raum.

3.1 Die Bourgain-Räume $X_{s,b}$

Zunächst definiert man für $s,b\in\mathbb{R}$ den anisotropen Sobolev-Raum $H_{s,b} := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t) : \|u\|_{H_{sb}} < \infty\}$ mit Norm

$$\|u\|^2_{H_{s,b}} := \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau\rangle^{2b} |\mathcal{F}u(\xi,\tau)|^2 d\xi d\tau ,$$

wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation in Raum- und Zeitvariablen ist. Anisotrop bedeutet: Unterschiedliche Ableitungsordnungen auf verschiedenen Variablen, hier für x einerseits und t andererseits.

Für die Behandlung (teilweise) periodischer Probleme – $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^e \times \mathbb{T}^{n-e})$ – muß $H_{s,b}$ etwas modifiziert werden. Man setzt

$$H_{s,b} = \{ u \in S'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t) : \tau_{2\pi k} u = u \quad \forall k \in \{\underbrace{(0,\dots,0)}_{\ell\text{-mal}}\} \times \mathbb{Z}^{n-\ell} \times \{0\} :$$

$$\|u\|_{H_{sb}} < \infty \}$$

mit $\|u\|^2_{H_{sb}} = \int_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{n-\ell}} \langle (\xi, k) \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2b} |\mathcal{F}u(\xi, k, \tau)|^2 d\xi d\tau$.

<u>Def.</u>: Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Phasenfunktion und $(U_\varphi(t))_{t \in \mathbb{R}}$ die zugehörige unitäre Gruppe. Dann heißt

$$X_{s,b} := (X_{s,b}(\varphi) :=) \{ u \in S'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t) : \|u\|_{X_{s,b}} := \|U_\varphi(-\cdot)u\|_{H_{sb}} < \infty \}$$

der Bourgain- (oder $X_{s,b}$-) Raum zur Phasenfunktion φ und den Sobolev-Exponenten $s, b \in \mathbb{R}$.

<u>Bem.</u> zur Definition:

(1) <u>Explizite Darstellung der Norm</u>: Wir haben

$$\mathcal{F}_x U_\varphi(-t) u(\cdot, t)(\xi) = e^{-it\varphi(\xi)} \mathcal{F}_x u(\xi, t).$$

Anschließende Fouriertransformation in der Zeit ergibt

$$\mathcal{F} U_\varphi(-\cdot) u(\xi, \tau) = \mathcal{F}u(\xi, \tau + \varphi(\xi)).$$

Einsetzen in die Def. der H_{sb}-Norm ergibt

$$\|u\|^2_{X_{sb}} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2b} |\mathcal{F}u(\xi, \tau + \varphi(\xi))|^2 d\xi d\tau$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \varphi(\xi) \rangle^{2b} |\mathcal{F}u(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau.$$

(2) Modifikation für (partiell) periodische Probleme: Hier verlangt man für $u \in X_{s,b}$, dass $u \in S'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t)$ liegt und in den Variablen (z.B.) $x_{e+1}, \ldots, x_n$ periodisch ist (wie oben für $H_{s,b}$). Die Norm nimmt dann die etwas veränderte Gestalt

$$\|u\|^2_{X_{sb}} = \int_{\mathbb{R}^{e+1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{n-e}} \langle(\xi,k)\rangle^{2s} \langle \tau - \varphi(\xi,k)\rangle^{2b} |\mathcal{F}u(\xi,k,\tau)|^2 d\xi\, d\tau$$

an. (Kann man auch als Integral nach einem Produkt aus Zähl- und Lebesgue-Maß wieder etwas einfacher schreiben.)

(3) Eine Interpretation des gemischten Gewichts $\langle \tau - \varphi(\xi)\rangle^b$: betrachten wir die Fouriertransformation einer Lösung $u(x,t) = U_\varphi(t)u_0(x)$ der homogenen linearen Gleichung (sog. "freie Lösung"). Hierfür ist

$$\mathcal{F}_x u(\xi,t) = e^{it\varphi(\xi)} \hat{u}_0(\xi)$$

und also

$$\mathcal{F}u(\xi,\tau) = (\mathcal{F}_t\, e^{i\cdot\varphi(\xi)} \hat{u}_0(\xi))(\tau) = \delta_0(\tau - \varphi(\xi))\,\hat{u}_0(\xi)$$

D.h.: Die Fouriertransformierte dieser Lösung hat ihren Träger im Graphen $G_\varphi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Phasenfunktion φ, das ist eine n-dim. Fläche (oft: C^∞-Untermannigfaltigkeit) im $\mathbb{R}^n$.

Im Fall der Wellengleichung (im engeren Sinn, d.h. $\varphi(\xi) = |\xi|$ bzw. $\varphi(\xi) = -|\xi|$) ist eine Interpretation des Fourier-Multiplikators $\mathcal{F}^{-1}(\tau - |\xi|)\mathcal{F}$ als Richtungsableitung, genauer: als Normalenableitung an diese Fläche möglich. Betrachten wir dazu $\varphi(\xi) = |\xi|$, so dass $\operatorname{supp} \mathcal{F}u \subset \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau = |\xi|\} =: C_+$, dem sog. "Vorwärtslichtkegel". Auf C_+ sei ein Punkt (ξ_0, τ_0) fixiert, und C_+ sei aufgefaßt als Nullstellengebilde von $\psi(\xi,\tau) = |\xi| - \tau$. Dann ist die Normale an C_+ (bis auf VZ und außerhalb des Nullpunkts) gegeben durch

$$\nu(\xi,\tau) = \frac{\nabla_{\xi,\tau}\psi(\xi,\tau)}{|\nabla_{\xi,\tau}\psi(\xi,\tau)|} ,$$

wobei $\nabla_{\xi,\tau}\psi(\xi,\tau) = (\nabla_\xi \varphi(\xi), -1) = (\frac{\xi}{|\xi|}, -1)$ und $|\nabla_{\xi,\tau}\psi(\xi,\tau)|^2 = 2$. Also ist ν unabhängig von τ und zwar

$$\nu(\xi,\tau) = \nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, -1\right) ,$$

das ist tatsächlich der äußere Normaleneinheitsvektor an C_+. Die Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial\nu(\xi_0)}$ in der physikalischen Raum-Zeit ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial\nu(\xi_0)} = \nu(\xi_0)\cdot\nabla_{xt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\xi_0}{|\xi_0|}\cdot\nabla_x - \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Ist dann $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, so ist

$$\mathcal{F}\frac{\partial}{\partial\nu(\xi_0)} f\,(\xi,\tau) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\xi_0\cdot\xi}{|\xi_0|} - \tau\right)\hat{f}(\xi,\tau)$$

und in $(\xi,\tau) = (\xi_0,\tau_0)$ ergibt sich tatsächlich der Multiplikator $\frac{i}{\sqrt{2}}(|\xi_0| - \tau_0)$. Für andere Phasenfunktionen trifft diese Anschauung wg. der unterschiedlichen Ableitungsordnungen jedoch nicht zu.

(4) Isomorphismen: Offenbar ist der Bessel-Potential-Operator $J^\sigma : X_{s,b} \longrightarrow X_{s-\sigma,b}$ $\quad (J^\sigma = \mathcal{F}_x^{-1}\langle\xi\rangle^\sigma \mathcal{F}_x)$
ein isometrischer Isomorphismus. Definiert man ferner

$$\Lambda^\beta := \mathcal{F}^{-1}\langle\tau - \varphi(\xi)\rangle^\beta \mathcal{F} : X_{sb} \longrightarrow X_{s,b-\beta},$$

so ist dies ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus. Insbes. haben wir $X_{sb} \cong L^2_{xt}$ (via $J^s\Lambda^b$), und damit handelt es sich bei X_{sb} um einen separablen Hilbertraum.

Als H-Raum ist X_{sb} in natürlicher Weise sein eigener Dualraum. Andrerseits ist man für Normabschätzungen am Dualraum von X_{sb} bezüglich des L^2_{xt}-Skalarprodukts interessiert. Hier gilt $X_{-s,-b} \cong X_{s,b}'$ im folgenden Sinne: Durch

$$\phi : X_{-s,-b} \longrightarrow X_{sb}', \quad v \longmapsto \phi(v), \text{ definiert durch}$$

$$\phi(v)[u] := \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (J^s\Lambda^b v)(J^{-s}\Lambda^{-b}u)\, d\lambda^{n+1}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus gegeben. Dies erlaubt für hinreichend glatte Funktionen (abhängig von s,b) die Abschätzung

$$\|u\|_{X_{s,b}} = \sup_{\substack{v\in S(\mathbb{R}^{n+1}) \\ \|v\|_{X_{-s,-b}}\le 1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} v\cdot u \, d\lambda^{n+1}.$$

Des weiteren ist per definitionem

$$U_\varphi : H_{sb} \longrightarrow X_{sb}, \quad U_\varphi u\,(x,t) := U_\varphi(t)\,u(x,t)$$

ein isometrischer Isomorphismus, und schließlich bildet die Fouriertransformation (in Raum und Zeit)

$$\mathcal{F} : X_{sb} \longrightarrow L^2_{\xi,\tau}(\langle\xi\rangle^{s}\langle\tau-\varphi(\xi)\rangle^{b}\, d\lambda^{n+1})$$ ggf. mit dem Zählmaß zu modifizieren

isomorph und isometrisch ab.

An dieser Stelle sei hervorgehoben, dass – ebenso wie bei $H^s = H^s_2$ – die X_{sb}-Norm nur von der Größe der Fouriertransformierten abhängt, d.h. wir haben

$$\|u\|_{X_{sb}} = \|\mathcal{F}^{-1}|\mathcal{F}u|\|_{X_{sb}}$$

und $|\mathcal{F}u| \le |\mathcal{F}v| \Longrightarrow \|u\|_{X_{sb}} \le \|v\|_{X_{sb}}$. Für viele Rechnungen bedeutet dies eine erhebliche Vereinfachung.

(5) Interpolation: Der zuletzt genannte Isomorphismus hat zur Folge, dass X_{sb} die Interpolationseigenschaften des gewichteten $L^2_{\xi,\tau}$-Raumes erbt. Insbesondere gilt:

Proposition 1: Es seien $s_0, s_1, s, b_0, b_1, b \in \mathbb{R}$, so dass für ein $\theta \in (0,1)$ gilt: $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ und $b = (1-\theta)b_0 + \theta b_1$. Dann ist

$$X_{sb} = [X_{s_0 b_0}, X_{s_1 b_1}]_\theta ,$$

wobei $[\,,\,]_\theta$ die komplexe Interpolationsmethode bezeichnet.

(Verallgemeinerung des Satzes von Riesz-Thorin)

Neben der Ungleichung $\|u\|_{X_{sb}} \le \|u\|^{1-\theta}_{X_{s_0 b_0}} \|u\|^{\theta}_{X_{s_1 b_1}}$ (vgl. A 15), die man mit der Hölderschen Ungleichung auch "zu Fuß" beweisen kann, umfaßt dies die folgende Aussage:

sind E_0, E_1, E_θ für $\theta \in (0,1)$ Banachräume, so dass ebenfalls $[E_0, E_1]_\theta = E_\theta$ gilt (z.B. L^p-, gemischte $L^p_t L^q_x$- oder Sobolevräume wie $H^s_p, \dots$) und, für $i \in \{0,1\}$

$T_i : X_{s_i, b_i} \longrightarrow E_i$ stetige lineare Abb. mit $\| T_i \|_{X_{s_i b_i} \to E_i} \leq M_i$,

derart, dass $T_0 |_{X_{s_0 b_0} \cap X_{s_1 b_1}} = T_1 |_{X_{s_0 b_0} \cap X_{s_1 b_1}} = T$, so besitzt T eine (eindeutig bestimmte) stetige lineare Fortsetzung

$T_\theta : X_{s,b} \longrightarrow E_\theta$ mit $\| T_\theta \|_{X_{sb} \to E_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Desgleichen für lineare Abbildungen $T_i : E_i \longrightarrow X_{s_i, b_i}$. Für die komplexe Methode gilt auch die Verallgemeinerung auf multilineare Abbildungen

$$\mathbb{M}_i : X_{s_{i1}, b_{i1}} \times \dots \times X_{s_{ik}, b_{ik}} \longrightarrow E_i \quad , \quad i \in \{0,1\}$$

wobei ebenfalls die Rollen der X- und der E-Räume vertauscht werden kann.

(6) <u>Äquivalenz von Normen:</u> Es seien $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Phasenfunktionen. Dann gelten:

(i) Ist $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| < \infty$, so ist $\| \ \|_{X_{sb}(\varphi_1)} \sim \| \ \|_{X_{sb}(\varphi_2)}$.

(ii) Sind die φ_i stetig, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| = \infty$ und $b \neq 0$,

so ist die Ungleichungskette

$$\frac{1}{c} \| u \|_{X_{sb}(\varphi_1)} \leq \| u \|_{X_{sb}(\varphi_2)} \leq c \| u \|_{X_{sb}(\varphi_2)}$$

für jedes $c > 0$ falsch.

Begründung:

Zu (i): Wir haben $\langle \tau - \varphi_1(\xi)\rangle \sim 1 + |\tau - \varphi_1(\xi)| \leq 1 + |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)| + |\tau - \varphi_2(\xi)|$

$$\leq \quad c + |\tau - \varphi_2(\xi)| \leq c\langle \tau - \varphi_2(\xi)\rangle, \quad c = 1 + \sup_\xi |\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)|$$

Andersherum genauso.

Zu (ii) O.E. $\varphi_2(\xi) = 0$ und $\varphi_1(\xi) =: \varphi(\xi)$ unbeschränkt. Dann wählen wir eine Folge $(\xi_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ und eine Funktionenfolge u_k mit

$\mathcal{F}u_k(\xi,\tau) = \chi_{(-1,1)}(\tau) \cdot \chi_{B_{\frac{1}{k}}(\xi_k)}(\xi) \cdot \sqrt{k}^n$, so dass

$$\| u_k \|_{H_{0b}} = \| u_k \|_{X_{0b}(\varphi_2)} = c > 0$$

Andererseits ist $\| u_k \|_{X_{0b}(\varphi)} \sim |\varphi(\xi_k)|^b \longrightarrow \begin{cases} \infty, & \text{falls } b > 0 \\ 0, & \text{"} \quad b < 0. \end{cases}$

Für $s \neq 0$ benutzt man jetzt den Isomorphismus J^s.

Diskussion: Zu (i) Ist die Phasenfunktion φ beschränkt, so ist also $X_{s,b}(\varphi) = H_{sb}$ mit Äquivalenz von Normen. Ferner machen die X_{sb}-Normen keinen Unterschied z.B. zwischen einer Wellengleichung (im engeren Sinne) mit $\varphi(\xi) = \pm|\xi|$ und einer Klein-Gordon-Gleichung mit $\varphi(\xi) = \pm\sqrt{m^2 + |\xi|^2}$ oder einer linearen Schrödingergleichung $\varphi(\xi) = -\xi^2$ und der entsprechenden "Halbwelle" mit $\varphi(\xi) = -|\xi|\sqrt{1+\xi^2}$ ist. einer Boussinesq-Gleichung, für die

(ii) Ist für eine Phasenfunktion $\sup_\xi |\varphi(\xi) + \varphi(-\xi)| = \infty$, also der gerade Anteil von φ unbeschränkt (wie z.B. bei der Schrödinger-Gleichung), so ist für $b \neq 0$

$$\| u \|_{X_{s,b}} \not\sim \| \bar{u} \|_{X_{sb}},$$

denn wir haben $\mathcal{F}\bar{u}(\xi,\tau) = \overline{\mathcal{F}u(-\xi,-\tau)}$ und daher

$$\|\bar{u}\|^2_{X_{sb}(\varphi)} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle\xi\rangle^{2s} \langle\tau - \varphi(\xi)\rangle^{2b} |\mathcal{F}u(-\xi,-\tau)|^2 d\xi d\tau$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle\xi\rangle^{2s} \langle\tau + \varphi(-\xi)\rangle^{2b} |\mathcal{F}(u(\xi,\tau))|^2 d\xi d\tau = \|u\|^2_{X_{sb}(\tilde{\varphi})}$$

für $\tilde{\varphi}(\xi) = -\varphi(-\xi)$. Also bedeutet $\sup_\xi |\varphi(\xi)+\varphi(-\xi)| = \infty$, dass die Differenz der Phasenfunktionen φ und $\tilde{\varphi}$ unbeschränkt ist. Diese einfache Beobachtung schlägt sich nieder in unterschiedlichen Ergebnissen für Nichtlinearitäten gleichen Grades aber verschiedener Struktur, z. B. bei NLS mit $N(u) \in \{u^3, u^2\bar{u}, \bar{u}^2 u, \bar{u}^3\}$, s.o.

(ENDE der Bemerkungen zur Definition)

Lemma 1 (einfache* Einbettungen): Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt mit stetigen Einbettungen:

(i) $C_t(\mathbb{R}, H^s) \supset X_{sb}$, falls $b > \frac{1}{2}$;

(ii) $X_{sb} \subset L^p_t(\mathbb{R}, H^s_x)$, falls $b \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ und $2 \leq p < \infty$;

(iii) $L^1_t(\mathbb{R}, H^s_x) \subset X_{sb}$, falls $b < -\frac{1}{2}$;

(iv) $L^p_t(\mathbb{R}, H^s_x) \subset X_{sb}$, falls $b \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ und $1 < p \leq \infty$.

Zum Bew. kann o.E. $s = 0$ angenommen werden. Zu (i) haben wir

$$\|u\|_{L^\infty_t L^2_x} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}_x u(\xi,t)|^2 d\xi$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}_x u(\xi,t)|^2 d\xi \quad \ldots$$

p.t.o. →

---

* d.h.: von der Phasenfunktion unabhängige

(ii) Schrödingergleichung, also $\varphi(\xi) = -|\xi|^2$, auf $\mathbb{R}^n$. Hier haben wir die bilinearen Verfeinerungen der Strichartz-Abschätzungen zur Verfügung, die wir ebenfalls in X_{sb}-Abschätzungen umwandeln können.

$$n = 1: \quad \| |D_x|^{\frac{1}{2}} (u\bar{v}) \|_{L^2_{xt}} \lesssim \|u\|_{X_{0b}} \|v\|_{X_{0b}}, \quad b > \frac{1}{2}$$

$$n \geq 2: \quad \| |D_x|^{\frac{1}{2}} (uv) \|_{L^2_{xt}} \lesssim \|u\|_{X_{sb}} \|v\|_{X_{0b}}, \quad b > \frac{1}{2}, \, s > \frac{n-1}{2}.$$

Wir steuern jetzt auf einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu, der unabhängig von der Phasenfunktion und der Nichtlinearität formuliert und bewiesen werden kann. Alle spezifischen Eigenschaften einer Gleichung werden dabei in die Abschätzungen der Nichtlinearität in den passenden $X_{sb}(\varphi)$-Normen verschoben. Zu diesem Zweck benötigen wir: $\longrightarrow$