3.2 Abschneidefunktionen und lineare Abschätzungen

Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}(\psi) \subset (-2,2)$, $\psi(t)=1$ $\forall t\in[-1,1]$ und $\psi(t)\geq 0$ $\forall t\in\mathbb{R}$. Für $\delta\in(0,1)$ setzen wir $\psi_\delta(t) := \psi(\frac{t}{\delta})$, so dass $\psi_\delta(t)=1$ auf $[-\delta,\delta]$ und $\mathrm{supp}(\psi_\delta)\subset(-2\delta,2\delta)$.

Bem.: ψ_δ dient zur Lokalisierung in der Zeitvariable t. Da wir in $X_{sb}(\varphi)$ mit $b>\frac{1}{2}$ arbeiten, um die Stetigkeit der Lösung zu erreichen (vgl. Lemma 1 (ii)), können wir keinen scharfen cut-off verwenden, denn $\chi_{[-\delta,\delta]} \notin H^b$ für $b>\frac{1}{2}$.

Lemma 1: Für $s,b\in\mathbb{R}$ und $u_0\in H^s_x$ gilt $\|\psi U_\varphi u_0\|_{X_{sb}(\varphi)} \lesssim \|u_0\|_{s,2}$.

Bew.: Da Multiplikation mit ψ und U_φ vertauschen, gilt

$$\|\psi U_\varphi u_0\|_{X_{sb}(\varphi)} = \|U_\varphi(-\cdot)\,\psi\, U_\varphi u_0\|_{H_{sb}}$$

$$= \|\psi\cdot u_0\|_{H_{sb}} = \|\psi\|_{H^b_t}\,\|u_0\|_{H^s_x} = c_\psi\,\|u_0\|_{s,2}.$$

Auch die Abschätzung der Lösung der inhomogenen Gleichung,

d.i. $\quad U_\varphi *_R F(t) := \int_0^t U_\varphi(t-t')F(t')\,dt'$

in $X_{sb}(\varphi)$-Normen wird unabhängig von φ (durch die Konstruktion) und kann leicht reduziert werden auf die Abschätzung eines Integraloperators in H^b_t. Sie ist dennoch etwas anspruchsvoller:

Lemma 2: Es seien $s \in \mathbb{R}$ und $b'+1 \geq b \geq 0 \geq b' > -\frac{1}{2}$ sowie $0 < \delta < 1$. Dann gilt

$$\| \psi_\delta U_\varphi *_R F \|_{X_{sb}(\varphi)} \lesssim \delta^{1-b+b'} \| F \|_{X_{sb'}(\varphi)}$$

Bew.: O.E. sei $s = 0$. Setzt man $G(t) = U_\varphi(-t) F(t)$, so ist $U_\varphi(-t) U_\varphi *_R F(t) = \int_0^t G(t')dt'$ und die behauptete Ungleichung geht über in

$$\| \psi_\delta \cdot \int_0^{\cdot} G(t')dt' \|_{H_{0b}} \lesssim \delta^{1-b+b'} \| G \|_{H_{0,b'}} \qquad (1)$$

Wenn wir nun die ausschließlich auf die t-Variable bezogene Abschätzung

$$\| \psi_\delta k g \|_{H_t^b} \lesssim \delta^{1-b+b'} \| g \|_{H_t^{b'}}, \quad \left(k g(t) = \int_0^t g(t')dt' \right) \qquad (2)$$

zeigen können, so erhalten wir daraus (1) durch Quadrieren, Integration nach x und anschließendes Wurzelziehen. Zum Beweis von (2) schreiben wir

$$\int_0^t g(t')dt' = \int_{\mathbb{R}} g(t') \overline{\chi_{[0,t]}(t')} dt' \overset{\text{Parseval}}{=} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\tau) \overline{\hat{\chi}_{[0,t]}(\tau)} d\tau,$$

wobei $\hat{\chi}_{[0,t]}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-it'\tau} dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-it\tau}-1}{-i\tau}$, so dass

$$\int_0^t g(t')dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\tau) \frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} d\tau =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (I + II + III)$$

mit $\quad I = \int\limits_{|\tau|\delta \le 1} \hat{g}(\tau) \dfrac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\, d\tau ,$

$$II = \int\limits_{|\tau|\delta \ge 1} \hat{g}(\tau) e^{it\tau} \frac{1}{i\tau}\, d\tau \quad \text{und} \quad III = -\int\limits_{|\tau|\delta \ge 1} \hat{g}(\tau) \frac{1}{i\tau}\, d\tau .$$

Zur Abschätzung von $\| \psi_\delta I \|_{H_t^b}$ bemerken wir die Taylorentwicklung

$$\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (i\tau)^{k-1} ,$$

so dass

$$\psi_\delta(t) \cdot I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \; t^k \psi_\delta(t) \cdot \int\limits_{|\tau|\delta \le 1} \hat{g}(\tau) (i\tau)^{k-1} d\tau$$

und

$$\| \psi_\delta I \|_{H_t^b} \lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \; \| t^k \psi_\delta \|_{H_t^b} \cdot \int\limits_{|\tau|\delta \le 1} |\hat{g}(\tau)|\, |\tau|^{k-1} d\tau \qquad (3)$$

Dabei ist $|\widehat{t^k \psi_\delta}(\tau)| = |\hat{\psi}_\delta^{(k)}(\tau)|$ mit $\hat{\psi}_\delta(\tau) = \delta \hat{\psi}(\delta\tau)$, also

$|\widehat{t^k \psi_\delta}(\tau)| = \delta^{k+1} |\hat{\psi}^{(k)}(\delta\tau)|$. Daraus folgt

$$\| t^k \psi_\delta \|_{H_t^b}^2 = \delta^{2k+2} \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2b} |\hat{\psi}^{(k)}(\delta\tau)|^2 d\tau \qquad \delta\tau = \sigma \quad d\tau = \frac{d\sigma}{\delta}$$

$$= \delta^{2k+1} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 + \left(\frac{\tau}{\delta}\right)^2\right)^b |\hat{\psi}^{(k)}(\tau)|^2 d\tau$$

$$\le \delta^{2k+1-2b} \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2b} |\hat{\psi}^{(k)}(\tau)|^2 d\tau ,$$

so dass

$$\| t^k \psi_\delta \|_{H_t^b} \lesssim \delta^{k+\frac{1}{2}-b} \| t^k \psi \|_{H_t^b} \lesssim \delta^{k+\frac{1}{2}-b} \| t^k \psi \|_{H_t^1} \lesssim \delta^{k+\frac{1}{2}-b} 2^k \qquad (4)$$

Insbesondere haben wir für $k=0$

$$\|\psi_\delta\|_{H_t^b} \lesssim \delta^{\frac{1}{2}-b}, \qquad (5)$$

was für den späteren Gebrauch festgehalten sei.

Für den letzten Faktor eines Summanden in (3) verwenden wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, sodass

$$\int_{|\tau|\le\frac{1}{\delta}} |\hat{g}(\tau)|\,|\tau|^{k-1}d\tau = \int_{|\tau|\le\frac{1}{\delta}} |\hat{g}(\tau)|\,\langle\tau\rangle^{b'}\langle\tau\rangle^{-b'}|\tau|^{k-1}d\tau$$

$$\lesssim \|g\|_{H_t^{b'}}\cdot\Big(\int_{|\tau|\le\frac{1}{\delta}} |\tau|^{2(k-1-b')}d\tau\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|g\|_{H_t^{b'}}\,\delta^{\frac{1}{2}-k+b'} \qquad (6)$$

beachte: $k\ge 1$

Einsetzen von (4) und (6) in (3) ergibt

$$\|\psi_\delta I\|_{H_t^b} \lesssim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot 2^k\cdot\delta^{k+\frac{1}{2}-b}\cdot\delta^{\frac{1}{2}-k+b'}\cdot\|g\|_{H_t^{b'}}$$

$$\lesssim \delta^{1-b+b'}\|g\|_{H_t^{b'}}\,.$$

II ist bis auf einen Faktor eine inverse Fouriertransformierte,

es ist $\quad \widehat{II}(\tau) = c\cdot\hat{g}(\tau)\,\chi_{\{|\tau|\delta\ge 1\}}\cdot\frac{1}{i\tau}\,.$

Daraus folgt $\widehat{\psi_\delta\cdot II}(\tau) = c\,\hat{\psi}_\delta * \widehat{II}(\tau)$ und mit $\langle\tau\rangle^b\lesssim\langle\tau_1\rangle^b+\langle\tau-\tau_1\rangle^b$

erhalten wir

$$\|\psi_\delta\cdot II\|_{H_t^b} \lesssim \|\psi_\delta\|_{H_t^b}\,\|\widehat{II}\|_1 + \|\hat{\psi}_\delta\|_1\,\|II\|_{H_t^b}\,,$$

wobei die Young'sche Ungleichung verwendet wurde.

Nach (5) ist $\|\psi_\delta\|_{H_t^b} \underset{(5)}{\lesssim} \delta^{\frac{1}{2}-b}$, wg. $\hat{\psi}_\delta(\tau)=\delta\hat{\psi}(\delta\tau)$

ergibt sich $\|\hat{\psi}_\delta\|_1 = c$.

$$\|\hat{II}\|_1 = \int_{|\tau|\geq\frac{1}{\delta}} |\hat{g}(\tau)|\,|\tau|^{b'}\,|\tau|^{-1-b'}\,d\tau \tag{7}$$

$$\underset{\text{C.S.}}{\lesssim} \|g\|_{H_t^{b'}} \cdot \left(\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \tau^{-2-2b'}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|_{H_t^{b'}}\,\delta^{\frac{1}{2}+b'}.$$

Für den ersten Beitrag haben wir also

$$\|\psi_\delta\|_{H_t^b}\,\|\hat{II}\|_1 \lesssim \delta^{1-b+b'}\,\|g\|_{H_t^{b'}},$$ wie gewünscht.

Weiterhin ist

$$\|II\|_{H_t^b}^2 \cong \int_{|\tau|\geq\frac{1}{\delta}} |\tau|^{2b-2}\,|\hat{g}(\tau)|^2\,d\tau = \int_{|\tau|\geq\frac{1}{\delta}} |\tau|^{2(b-1-b')}\langle\tau\rangle^{2b'}|\hat{g}(\tau)|^2 d\tau$$

$$\leq \delta^{2(1-b+b')}\,\|g\|_{H_t^{b'}}^2,$$

so dass sich dieselbe obere Schranke auch für den zweiten Beitrag und damit für $\|\psi_\delta II\|_{H_t^b}$ ergibt.

Schließlich ist III unabhängig von t und daher

$$\|\psi_\delta \cdot III\|_{H_t^b} \leq \|\psi_\delta\|_{H_t^b} \cdot \int_{|\tau|\geq\frac{1}{\delta}} \frac{|\hat{g}(\tau)|}{|\tau|}\,d\tau$$

$$\underset{(5)}{\lesssim} \delta^{\frac{1}{2}-b} \cdot \|\hat{II}\|_1 \underset{(7)}{\lesssim} \delta^{1-b+b'}\,\|g\|_{H_t^{b'}}.$$

Damit ist der Beweis von (2) erbracht und das Lemma gezeigt. $\square$