3.3. Ein allgemeiner lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Wir führen jetzt die Lösungsräume für das Cauchy-Problem

$$u(t=0) = u_0 \in H^s_x , \quad s \in \mathbb{R} \tag{1}$$

zur Gleichung $u_t - i\varphi(-i\nabla)u = N(u)$ ein. (Wir beschränken uns auf eine einzelne Gleichung, im Fall eines Systems bildet man das kartesische Produkt und normiert dies so, dass wieder ein Hilbertraum entsteht.)

Für $b \geq 0$ und $0 < \delta \leq 1$ setzt man $I_\delta := [-\delta,\delta] \times \mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner $I_\delta := [-\delta,\delta] \times \mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^{n-l}$) und

$$X^\delta_{sb} := \{ u|_{I_\delta} : u \in X_{sb} \} ,$$

also den Raum aller Einschränkungen von X_{sb}-Funktionen auf I_δ. Sei $N_\delta := \{ u \in X_{sb} : u|_{I_\delta} = 0 \} = N(R_\delta)$, wobei $R_\delta = \cdot|_{I_\delta}$ der Einschränkungs- oder Restriktionsoperator ist. Dann können wir X^δ_{sb} mit dem Quotienten $X_{sb}/N_\delta := \{ u + N_\delta : u \in X_{sb} \}$ identifizieren durch

$$u|_{I_\delta} \overset{\sim}{\to} u + N_\delta \quad \left(= \text{Äquivalenzklasse aller } X_{sb}\text{-Funktionen, die auf } I_\delta \text{ mit } u \text{ übereinstimmen} \right)$$

Der Quotientennorm

$$\| u + N_\delta \| = \inf_{f \in N_\delta} \| u + f \|_{X_{sb}}$$

auf X_{sb}/N_δ entspricht dabei die Restriktionsnorm

$$\|u\|_{X_{sb}^\delta} := \inf \{ \|\tilde u\|_{X_{sb}} : \tilde u|_{I_\delta} = u \},$$

der die Methode ihren Namen verdankt. Wir stellen fest:

- X_{sb} ist ein Hilbertraum und N_δ ein abgeschlossener Teilraum. Also ist X_{sb}/N_δ und damit auch $\underline{X_{sb}^\delta}$ ein Hilbertraum und also insbesondere <u>vollständig</u>.
- Die Einschränkung des Restriktionsoperators R_δ auf $N_\delta^\perp$, also

$$R_\delta|_{N_\delta^\perp} : X_{sb} \supset N_\delta^\perp \longrightarrow X_{sb}^\delta$$

ist bijektiv (der Kern ist p.d. $= \{0\}$), d.h. zu jedem $u \in X_{sb}^\delta$ gibt es genau ein $\tilde u \in \cancel{X_{sb}}\, N_\delta^\perp \subset X_{sb}$, so dass $\tilde u|_{I_\delta} = u$. Hierfür gilt

$$\|u\|^2_{X_{sb}^\delta} = \inf \{ \|\tilde u + w\|^2_{X_{sb}} : w \in N_\delta \} = \|\tilde u\|^2_{X_{sb}},$$

denn $\|\tilde u + w\|^2_{X_{sb}} = \|\tilde u\|^2_{X_{sb}} + \|w\|^2_{X_{sb}} \geq \|\tilde u\|^2_{X_{sb}}$

da $\tilde u \perp w$

Wir haben also einen wohldefinierten <u>stetigen</u> (<u>linearen</u>) <u>Fortsetzungsoperator</u>

$$E_\delta : X_{sb}^\delta \longrightarrow N_\delta^\perp \subset X_{sb}, \quad u \mapsto E_\delta u = \tilde u$$

mit $\tilde u$ wie in der zweiten Feststellung.

Satz 1: Es sei $s \in \mathbb{R}$ und es gebe $b > \frac{1}{2}$ sowie $b' > b-1$, so dass die Abschätzungen

$$\| N(u) \|_{X_{sb'}(\varphi)} \leq C_0 (\|u\|_{X_{sb}(\varphi)}) \|u\|_{X_{sb}(\varphi)}$$

und

$$\| N(u) - N(v) \|_{X_{sb'}(\varphi)} \leq C_0 (\|u\|_{X_{sb}(\varphi)} + \|v\|_{X_{sb}(\varphi)}) \|u - v\|_{X_{sb}(\varphi)}$$

mit einer monoton nicht fallenden Funktion $C_0 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ gelten.

Dann gibt es ein $\delta = \delta(\|u_0\|_{s,2}) > 0$ und eine eindeutige Lösung $u \in X_{sb}^{\delta}(\varphi)$ von (1). Diese liegt in $C([-\delta,\delta], H_x^s)$, und der Lösungsoperator ist Lipschitz auf Kugeln im Datenraum.

Bew.: (1) Es seien $u, v \in X_{sb}^{\delta}$ mit Fortsetzungen $\tilde{u}, \tilde{v} \in X_{sb}$, entsprechend der Vorbemerkung, d.h. ~ bedeutet den stetigen linearen Fortsetzungsoperator.

Dann ist

$$\psi_\delta \cdot U_\varphi *_R N(\tilde{u}) \quad \text{bzw.} \quad \psi_\delta U_\varphi *_R (N(\tilde{u}) - N(\tilde{v}))$$

eine Fortsetzung von $U_\varphi *_R N(u)$ bzw. von $U_\varphi *_R (N(u) - N(v))$.(*)

Dann ist

$$\| U_\varphi *_R N(u) \|_{X_{sb}^{\delta}} \leq \| \psi_\delta U_\varphi *_R N(\tilde{u}) \|_{X_{sb}} \lesssim \dots$$

(*) Hierin steckt eine Annahme: $N(u)$ sei lokal in der Variable t, enthalte also z.B. keine Faltungen bzgl. t. Stets erfüllt in den Anw.

$$\lesssim \delta^{1-b+b'} \|N(\tilde u)\|_{X_{sb'}} \quad \left(\begin{matrix}\text{aufgrund der Abschätzung für}\\ \text{die inhomogene lineare Gleichung}\end{matrix}\right)$$

$$\leq \delta^{1-b+b'} C_0(\|\tilde u\|_{X_{sb}}) \|\tilde u\|_{X_{sb}} \quad (\text{Vor.})$$

$$= \delta^{1-b+b'} C_0(\|u\|_{X^\delta_{sb}}) \cdot \|u\|_{X^\delta_{sb}} \tag{2}$$

Ebenso für die Differenz

$$\|U_\varphi *_R (N(u) - N(v))\|_{X^\delta_{sb}} \lesssim \delta^{1-b+b'} C_0(\|\tilde u\|_{X_{sb}} + \|\tilde v\|_{X_{sb}}) \|\tilde u - \tilde v\|_{X_{sb}}$$

$$\leq \delta^{1-b+b'} C_0(\|u\|_{X^\delta_{sb}} + \|v\|_{X^\delta_{sb}}) \|u-v\|_{X^\delta_{sb}} \tag{3}$$

Hier haben wir davon Gebrauch gemacht, dass $\sim$ für einen linearen Operator steht: Wir haben $\tilde u - \tilde v = \widetilde{u-v}$ benutzt.

Ferner ist $\psi \cdot U_\varphi u_0$ eine Fortsetzung von $U_\varphi u_0|_{I_\delta}$.

Aufgrund der Abschätzung für die homogene lineare Gleichung also

$$\|U_\varphi u_0\|_{X^\delta_{sb}} \leq \|\psi U_\varphi u_0\|_{X_{sb}} \leq C_\psi \|u_0\|_{s,2} \tag{4}$$

(2) Wir wählen $B_{R,\delta} := \{u \in X^\delta_{sb} : \|u\|_{X^\delta_{sb}} \leq R\}$, versehen mit der natürlichen Metrik, und setzen wie üblich

$$\Lambda u(t) = U_\varphi(t) u_0 + U_\varphi *_R N(u).$$

Dann ergeben die Abschätzungen (2) und (4), dass

$$\|\Lambda u\|_{X^\delta_{sb}} \leq C_\psi \|u_0\|_{s,2} + \delta^{1-b+b'} C_0(\|u\|_{X^\delta_{sb}}) \cdot \|u\|_{X^\delta_{sb}},$$

aus (3) erhalten wir

$$\| \Lambda u - \Lambda v \|_{X_{sb}^\delta} \lesssim \delta^{1-b+b'} C_0 (\|u\|_{X_{sb}^\delta} + \|v\|_{X_{sb}^\delta}) \|u-v\|_{X_{sb}^\delta} .$$

Sind jetzt $u, v \in B_{R,\delta}$, so haben wir (mit Übergang $C_0 \leadsto c \cdot C_0$)

$$\| \Lambda u \|_{X_{sb}^\delta} \leq C_4 \|u_0\|_{s,2} + \delta^{1-b+b'} C_0(R) \cdot R$$

$$\| \Lambda u - \Lambda v \|_{X_{sb}^\delta} \leq \delta^{1-b+b'} C_0(2R) \|u-v\|_{X_{sb}^\delta} .$$

Die Wahl $R = 2 C_4 \|u_0\|_{s,2}$ und $\delta = \left(\frac{1}{2 C_0(2R)} \right)^{\frac{1}{1-b+b'}}$

ergibt, dass $\Lambda : B_{R,\delta} \to B_{R,\delta}$ eine Kontraktion ist. Der Banachsche FPS liefert eine Lösung $u \in B_{R,\delta} \subset X_{sb}^\delta$, die in $B_{R,\delta}$ eindeutig ist.

(3) Da $b > \frac{1}{2}$ vorausgesetzt ist, haben wir $X_{sb} \subset C(\mathbb{R}, H_x^s)$ (*) und also auch $X_{sb}^\delta \subset C([-\delta,\delta], H_x^s)$, das ist die behauptete "persistence property". Wieder macht – unter der Annahme der Nicht-Eindeutigkeit der Lösung in X_{sb}^δ – die Def

$$\delta_0 := \inf \{ t \in (0,\delta] : u(t) \neq v(t) \}$$

Sinn. Betrachtet man das AWP $u_1(0) = u(\delta_0) = v(\delta_0)$ für dieselbe Gleichung, liefert die Wdh. des obigen Arguments einen Widerspruch. Die behauptete Lipschitz-Abschätzung für Daten in $B_{\|u_0\|}(0) \subset H_x^s$ und also Lösungen in $B_{R,\delta}$, R, δ wie oben, erhält man durch Abschätzung von $\| \Lambda_{u_0} u - \Lambda_{v_0} v \|_{X_{sb}^\delta}$ in der selben Weise wie oben (bzw. wie bereits früher diskutiert)

(*) s.o., Abschnitt 3.1: "einfache Einbettungen".

□

Diskussion:

(1) Der Fall $b = \frac{1}{2} = -b'$. (Häufig, insbes. im periodischen Fall, gelingt der Beweis der im Satz 1 vorausgesetzten Ungleichungen nur für diese Wahl der Parameter.) Hier ist das oben dargestellte Argument in zweifacher Hinsicht zu ergänzen:

(i) Eine positive Potenz von δ ist aus den nichtlinearen Abschätzungen zu gewinnen. Dazu schreibt man zusätzlich eine Abschneidefunktion $\psi_{2\delta}$ in die Nichtlinearität, betrachtet also $\| N(\psi_{2\delta} u)\|_{X_{sb'}}$. Gelingt es dann, auf der rechten Seite der Abschätzungen einen Faktor

$$\| \psi_{2\delta} u \|_{X_{sb_1}} \lesssim \delta^{\frac{1}{2}-b_1} \| u \|_{X_{sb}}$$

Übungsaufgabe

mit einem $b_1 < \frac{1}{2}$ zu erzeugen, ist der "Mangel" behoben.

(ii) Abschätzung der Lösung der inhomogenen Gleichung und "persistence property".

Falls $b' = -\frac{1}{2}$ ist, behält man im Lemma 2 des vorigen Abschnitts einige Terme übrig, die man zu

$$\| \langle \tau \rangle^{-1} \hat{g} \|_{L^1_\tau} \qquad \text{bzw. zu}$$

$$\| \langle \xi \rangle^s \langle \tau \rangle^{-1} \mathcal{F}_x (U_\varphi(-\cdot) u) \|_{L^2_\xi L^1_\tau} =: \| u \|_{Y_s}$$

zusammenfassen kann. Gelingt es, diese ebenfalls durch $C_0(\|u\|_{X_{s,\frac12}})\|u\|_{X_{s,\frac12}}$ (und entsprechend für die Differenz) zu kontrollieren, so kann man zum einen das Kontraktionsargument schließen, zum anderen die Stetigkeit der Lösung zeigen. Dazu beweist man die Ungleichung

$$\sup_{|t|\leq\delta} \| U_\varphi *_R F(t)\|_{H^s} \lesssim \langle\delta\rangle \|F\|_Y$$

als Ergänzung / Verschärfung der linearen Abschätzung in Lemma 2. Ein Approximationsargument liefert die Stetigkeit von $U_\varphi *_R F$ als Funktion von t. Es muß lediglich $F\in L^1([-\delta,\delta],H^s_x)$ sein, damit $U_\varphi *_R F$ definiert ist.

(2) Eine weitere Reduktion: Im Fall

$$N(u) = M(u,\dots,u)$$

mit einer multilinearen (möglicherweise in einzelnen Komponenten auch antilinearen) Abbildung M, wie z. B.

$$N(u) = \partial_x(u^{k+1}),\quad k\in\mathbb{N} \longrightarrow \text{gKdV},$$

reicht der Beweis von

$$\| M(u_1,\dots,u_N)\|_{X_{s,b'}} \lesssim \prod_{j=1}^{N} \|u_j\|_{X_{s b}},$$

damit beide in Satz 1 vorausgesetzten Abschätzungen gegeben sind. Für die erste ergibt sich dies mit

$C_0(t) = c\,t^{N-1}$, wenn man $u_1 = \dots = u_N = u$ setzt.

Die zweite erhält man, wenn man

$$N(u) - N(v) = M(u,\dots,u) - M(v,\dots,v) =$$

$$= M(u-v, u,\dots,u) + M(v, u-v, u,\dots,u) + \dots + M(v,\dots,v,u-v)$$

beachtet.

(3) Erhaltung höherer Regularität:

Bewiesen sei eine Abschätzung

$$\| M(u_1,\dots,u_N) \|_{X_{s,b'}} \lesssim \prod_{j=1}^{N} \|u_j\|_{X_{sb}} , \qquad (*)$$

die nach Satz 1 und Bem. (2) zu einem LWP-Ergebnis für Daten in H^s_x führt, wobei die Lebensdauer der Lösung von $\|u_0\|_{s,2}$ abhängt.

Mit $\langle \xi \rangle^{\sigma-s} \lesssim \sum_{j=1}^{N} \langle \xi_j \rangle^{\sigma-s}$ ergibt sich für $\sigma > s$

die Abschätzung

$$\| M(u_1,\dots,u_N) \|_{X_{\sigma,b'}} \lesssim \sum_{j=1}^{N} \|u_j\|_{X_{\sigma,b}} \cdot \prod_{i \neq j} \|u_i\|_{X_{sb}} ,$$

speziell

$$\| N(u) \|_{X_{\sigma,b'}} \lesssim \|u\|^{N-1}_{X_{sb}} \|u\|_{X_{\sigma b}} .$$

Führt man dann das Kontraktionsargument in

$$B_{R_\sigma, R_s, \delta} := \{ u \in X^\delta_{\sigma,b} : \|u\|_{X^\delta_{\sigma,b}} \le R_\sigma \wedge \|u\|_{X^\delta_{s,b}} \le R_s \}$$

durch, kann man LWP in H^σ_x erreichen, wobei die Lebensdauer der Lösung nur von $\|u_0\|_{s,2}$ und nicht von der größeren Norm $\|u_0\|_{\sigma,2}$ abhängt. (Für die Differenzabschätzung in $X^{\delta}_{\sigma,b}$ ist noch etwas zu tun, aber keine wesentlich schärfere Abschätzung!). Das ist insbes. dann von Bedeutung, wenn $\|u_0\|_{s,2}$ durch eine Erhaltungsgröße kontrollierbar ist. Der Schluss von LWP + Erhaltungssatz $\Longrightarrow$ GWP ist dann auch für höhere Regularitäten möglich.